

2.7. Приклади побудови планів швидкостей і прискорень

Приклад 2.6. Для заданого положення шарнірного чотириланкового механізму (рис. 2.15) визначити швидкість і прискорення точки В та кутові швидкості і прискорення усіх його ланок. Дано $\omega_1 = 10 \text{ с}^{-1}$; $l_{OA} = 0,05 \text{ м}$; $l_{AB} = l_{BC} = 4 \cdot l_{OA}$; $\alpha = 45^\circ$. Ланка l_{AB} розміщена горизонтально, а ланка l_{BC} вертикально.

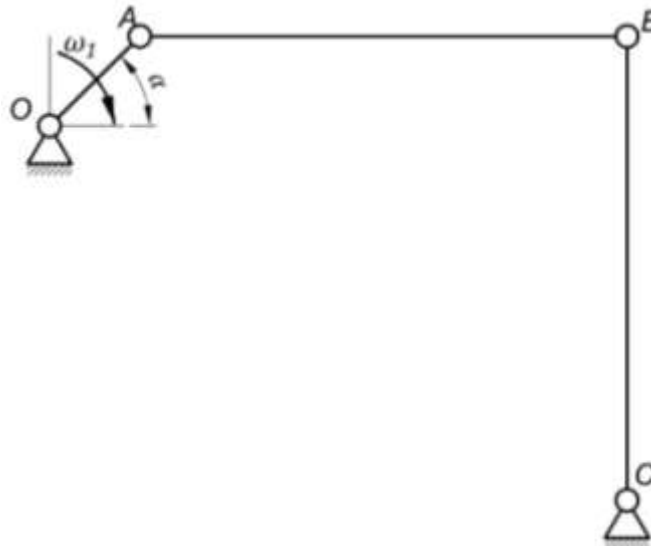


Рисунок 2.15

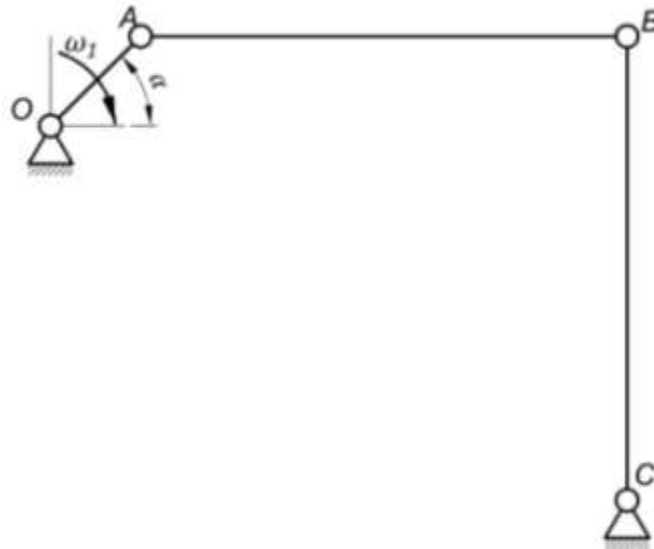
Рішення. У масштабі $\mu_l = l_{OA} / OA = 0,05/10 = 0,005 \text{ м/мм}$ будуємо план положення важільного механізму. При цьому $l_{AB} = l_{BC} = 40 \text{ мм}$ (рис. 2.16,а).

Визначаємо модуль швидкості і прискорення точки А механізму першого класу.

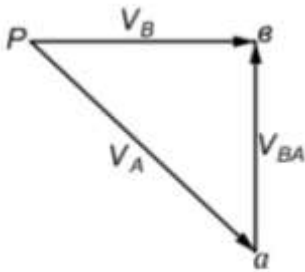
$$V_A = \omega_1 \cdot l_{OA} = 10 \cdot 0,05 = 0,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$a_A = \omega_1^2 \cdot l_{OA} = 10^2 \cdot 0,05 = 5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

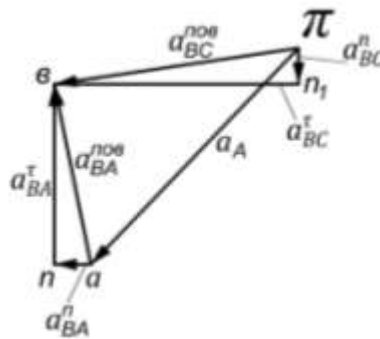
Записуємо системи векторних рівнянь для визначення невідомих швидкостей і прискорень.



a)



б)



в)

Рисунок 2.16

Векторні рівняння швидкості точки В :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA};$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_C + \vec{V}_{BC};$$

або

$$\vec{V}_A + \vec{V}_{BA} = \vec{V}_C + \vec{V}_{BC}.$$

Векторні рівняння прискорення, як відомо з курсу теоретичної механіки, складаються із трьох прискорень, тому система буде мати вид:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau;$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC}^n + \vec{a}_{BC}^\tau,$$

або

$$\bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau = \bar{a}_C + \bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^\tau.$$

Розглянемо методику побудови плану швидкостей механізму. Для цього виконаємо аналіз векторного рівняння швидкості. Визначаємо невідомі величини швидкостей та напрями їх дій. Швидкість \bar{V}_A направлена перпендикулярно ланці ОА і спрямована бік її обертання, швидкість \bar{V}_{BA} направлена перпендикулярно ланці АВ, швидкість V_C дорівнює нулю, швидкість \bar{V}_{BC} направлена перпендикулярно ланці ВС.

Визначаємо масштаб плану швидкостей за формулою:

$$\mu_V = \frac{V_A}{[pa]}$$

де $[pa]$ – довільно вибраний на кресленні відрізок. Наприклад, 50 мм. Тоді:

$$\mu_V = \frac{0,5}{50} = 0,01 \frac{\text{м}}{\text{мм}\cdot\text{с}}.$$

Будуємо план швидкостей у прийнятому масштабі $\mu_V = 0,01 \text{ м/мм}\cdot\text{с}$ (рис. 2.16, б).

Визначаємо лінійні швидкості V_{BC} і V_{BA} . Для цього скористаємось тим, що для даного положення $V_{BA} = V_{BC}$. Тоді:

$$V_{BA} = (av) \cdot \mu_V = 35,36 \cdot 0,01 = 0,354 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$V_{BC} = (pv) \cdot \mu_V = 35,36 \cdot 0,01 = 0,354 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Визначаємо кутові швидкості ланок АВ і ВС:

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{BA}} = 0,354/0,2 = 1,77 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_3 = \frac{V_{BC}}{l_{BC}} = 0,354/0,2 = 1,77 \text{ с}^{-1}.$$

Тепер розглянемо методику побудови плану прискорень. Для цього виконаємо аналіз векторного рівняння визначивши модулі прискорень та їх напрями дії.

Величини нормальних прискорень a_{BA}^n і a_{BC}^n визначаються наступним чином:

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB} = 1,77^2 \cdot 0,2 = 0,626 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_{BC}^n = \omega_3^2 \cdot l_{BC} = 1,77^2 \cdot 0,2 = 0,626 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Масштаб плану прискорень буде:

$$\mu_a = a_A / [\pi a] = 5/50 = 0,1 \frac{\text{м}}{\text{мм} \cdot \text{с}^2},$$

де $[\pi a]$ – 50 мм, довільно вибраний відрізок на кресленні.

Визначаємо невідомі відрізки, котрі на плані прискорень відображають нормальні прискорення:

$$[\pi a] = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a} = 0,626/0,1 = 6 \text{ мм}; \quad [\pi n_1] = \frac{a_{BC}^n}{\mu_a} = 0,626/0,1 = 6 \text{ мм}.$$

Будуємо план прискорення у прийнятому масштабі μ_a . З полюса π паралельно ланці ОА відкладаємо відрізок (πa), котрий зображує прискорення \bar{a}_A (рис. 2.16,в), направлений від точки А до точки О. Через кінець цього відрізка (точка а) проводимо лінію паралельну осі шатуна АВ, уздовж цієї лінії буде спрямоване прискорення a_{BA}^n від точки В до точки А, відрізок якого можна визначити. З отриманої точки (n) проводимо лінію перпендикулярну ланці АВ. На цій лінії у подальшому буде знаходитися прискорення \bar{a}_{BA}^t . Після цього від полюса π відкладаємо прискорення \bar{a}_C ($\bar{a}_C = 0$), точка С співпадає з полюсом, і a_{BC}^n у вигляді відрізка (πn_1), який спрямовуємо від точки В до точки С. З отриманої на плані точки n_1 проводимо лінію перпендикулярну ланці ВС. В перетині двох перпендикулярів

отримуємо точку v . Тоді, відрізки (νn) , (νn_1) будуть відображати шукані прискорення a_{BA}^t і a_{BC}^t .

Визначаємо величини лінійних прискорень: a_{BA}^τ , a_{BC}^τ , $a_{BA}^{\text{ПОВ}}$, $a_{BC}^{\text{ПОВ}}$:

$$a_{BA}^\tau = (n\nu) \cdot \mu_a = 31,5 \cdot 0,1 = 3,15 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_{BC}^\tau = (n_1\nu) \cdot \mu_a = 1,5 \cdot 0,1 = 0,15 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_{BA}^{\text{ПОВ}} = (a\nu) \cdot \mu_a = 33 \cdot 0,1 = 3,3 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_{BC}^{\text{ПОВ}} = (p\nu) \cdot \mu_a = 33 \cdot 0,1 = 3,3 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Визначаємо кутові прискорення ланок АВ і ВС:

$$\varepsilon_2 = a_{BA}^\tau / l_{BA} = 3,15 / 0,2 = 15,75 \text{с}^{-2};$$

$$\varepsilon_3 = a_{BC}^\tau / l_{BC} = 0,15 / 0,2 = 0,75 \text{с}^{-2}.$$

Приклад 2.7. Необхідно побудувати план швидкостей і прискорень стругального верстака (рис. 2.17), якщо $l_{OA} = 0,15\text{м}$; $l_{O_0O_1} = 0,5\text{м}$; $l_{O_1B} = 0,93\text{м}$; $l_{CB} = 0,19\text{м}$; $Y = 0,5\text{м}$; $\omega_1 = 10\text{с}^{-1}$; $\alpha = 90^\circ$.

Рішення. Будуємо в масштабі $\mu_l = 0,01 \text{ м/мм}$ план положення механізму (рис. 2.18,а). Для цього переводимо довжини ланок з метрових розмірів у міліметрові:

$$OA = \frac{l_{OA}}{\mu_l} = \frac{0,15}{0,01} = 15\text{мм}; \quad OO_1 = \frac{l_{O_0O_1}}{\mu_l} = \frac{0,50}{0,01} = 50\text{мм};$$

$$O_1B = \frac{l_{O_1B}}{\mu_l} = \frac{0,93}{0,01} = 93\text{мм}; \quad BC = \frac{l_{BC}}{\mu_l} = \frac{0,19}{0,01} = 19\text{мм};$$

$$y = \frac{Y}{\mu_l} = \frac{0,50}{0,01} = 50\text{мм}.$$

План швидкостей. Методика побудови.

Визначаємо швидкість точки A кривошипа OA :

$$V_A = \omega_1 \cdot l_{OA} = 10 \cdot 0,15 = 1,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

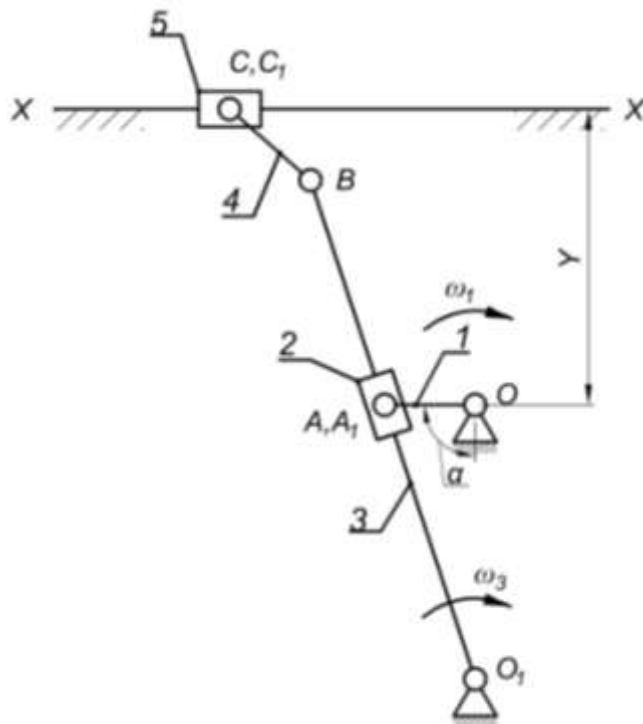


Рисунок 2.17

Масштаб плану швидкості буде:

$$\mu_V = \frac{V_A}{[pa]} = \frac{1,5}{60} = 0,025 \frac{\text{м}}{\text{мм} \cdot \text{с}}$$

Для внутрішньої кінематичної пари A_1 , групи Ассур 2 класу 3 виду записуємо векторне рівняння швидкості:

$$\vec{V}_{A_1} = \vec{V}_A + \vec{V}_{A_1A},$$

де \vec{V}_{A_1} – швидкість точки A_1 , направлена перпендикулярно кулісі O_1B ; \vec{V}_{A_1A} – швидкість точки A_1 відносно точки A , направлена паралельно кулісі O_1B (повзун ковзає по ланці O_1B); \vec{V}_A – швидкість точки A перпендикулярна кривошипу OA і направлена в бік його обертання.

Вибравши у вільному місці точку P (полюс) будуємо план швидкостей (рис. 2.18,б). З точки P проводимо лінію перпендикулярну кривошипу OA і направлену в бік його обертання. На цій лінії відкладаємо відрізок (Pa) , котрий зображує

швидкість \vec{V}_A . З точки a проводимо лінію паралельну кулісі O_1A , на цій лінії буде знаходитися швидкість \vec{V}_{A_1A} . З точки P проводимо лінію перпендикулярну кулісі O_1A . В перетині двох ліній отримаємо точку a_1 .

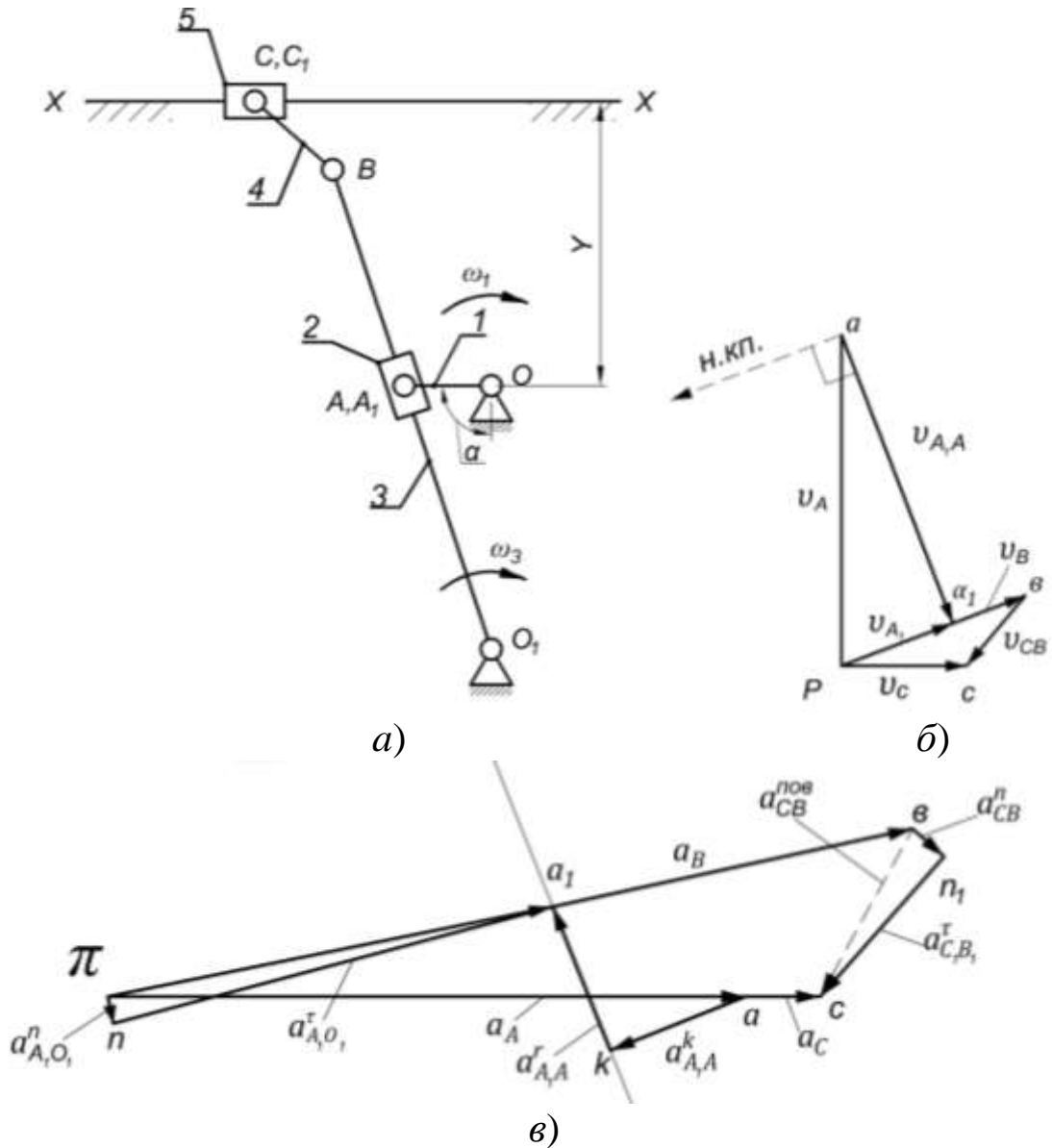


Рисунок 2.18

Знаючи швидкість точки A_1 , можна на підставі теореми про подібність визначити швидкість будь-якої точки, що лежить на кулісі. Так, наприклад для точки B за теоремою про подібність одержимо:

$$\frac{V_B}{V_{A_1}} = \frac{O_1B}{O_1A}$$

Або

$$(Pv) = (Pa_1) \cdot \frac{O_1B}{O_1A} = 20 \cdot \frac{91}{51} = 35,5 \text{ мм.}$$

Отриманий відрізок (Pv) відкладаємо по вектору швидкості $(\overline{Pa_1})$.

Для внутрішньої кінематичної пари C групи Ассур 2 класу 2 виду, записуємо векторне рівняння швидкості точки C :

$$\bar{V}_C = \bar{V}_B + \bar{V}_{CB},$$

де \bar{V}_C – швидкість точки C направлена вздовж напрямної $x - x$; \bar{V}_{CB} – швидкість точки C відносно точки B , направлена перпендикулярно ланці BC .

З точки (v) проводимо лінію перпендикулярну ланці BC , а з полюса горизонтальну лінію. Перетин цих двох ліній дасть точку (c) . Величини швидкостей дорівнюють:

$$V_{A_1A} = (aa_1) \cdot \mu_V = 50 \cdot 0,025 = 1,25 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$V_{A_1} = (Pa_1) \cdot \mu_V = 20 \cdot 0,025 = 0,50 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$V_B = (Pv) \cdot \mu_V = 34 \cdot 0,025 = 0,85 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$V_{BC} = (vc) \cdot \mu_V = 16 \cdot 0,025 = 0,40 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$V_C = (Pc) \cdot \mu_V = 22 \cdot 0,025 = 0,55 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\omega_3 = \frac{V_B}{l_{O_1B}} = \frac{0,85}{0,93} = 0,91 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_4 = \frac{V_{BC}}{l_{BC}} = \frac{0,40}{0,19} = 2,11 \text{ с}^{-1}.$$

План прискорення. Методика побудови.

Визначаємо прискорення точки A кривошипа OA :

$$a_A = \omega_1^2 \cdot l_{OA} = 10^2 \cdot 0,15 = 15 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Масштаб плану прискорень буде:

$$\mu_a = \frac{a_A}{[\pi a]} = \frac{15}{100} = 0,15 \cdot \frac{\text{м}}{\text{мм} \cdot \text{с}^2}.$$

Для внутрішньої кінематичної пари A_1 групи Ассур 2 класу 3 виду записуємо систему векторних рівнянь прискорень:

$$\bar{a}_{A_1} = \bar{a}_A + \bar{a}_{A_1A}^k + \bar{a}_{A_1A}^r;$$

$$\bar{a}_{A_1} = \bar{a}_{A_1O_1}^n + \bar{a}_{A_1O_1}^\tau,$$

де \bar{a}_A – прискорення, направлене уздовж осі ланки OA від точки A до точки O ; $\bar{a}_{A_1A}^k$ – коріолісове прискорення; $\bar{a}_{A_1A}^r$ – релятивне прискорення, направлене паралельно ланці O_1B ; $\bar{a}_{A_1O_1}^n$ – нормальне прискорення, направлене уздовж осі ланки AO_1 , від точки A до точки O_1 ; $\bar{a}_{A_1O_1}^\tau$ – дотичне прискорення, направлене перпендикулярно осі ланки BO_1 .

Коріолісове прискорення, що з'являється в результаті взаємодії переносного і відносного рухів, обчислюється за формулою:

$$a_{A_1A}^k = 2 \cdot \omega_3 \cdot V_{A_1A} = 2 \cdot 0,91 \cdot 1,25 = 2,28 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Напрямок коріолісового прискорення визначаємо так: швидкість V_{A_1A} повертаємо на 90° в бік обертання ланки O_1B , як показано пунктирними лініями на плані швидкостей (рис. 2.18,б).

Величина відрізка на плані (рис. 2.18,в), що зображує $\bar{a}_{A_1A}^k$ буде:

$$(ak) = \frac{a_{A_1A}^k}{\mu_a} = \frac{2,28}{0,15} \approx 16 \text{мм}.$$

Нормальне прискорення $\bar{a}_{A_1O_1}^n$ обчислюється за формулою:

$$a_{A_1O_1}^n = \omega_3^2 \cdot l_{O_1A} = \omega_3^2 \cdot (O_1A) \cdot \mu_l = 0,91^2 \cdot 51 \cdot 0,01 = 0,43 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

На кресленні це прискорення буде зображуватись відрізком (πn) . Величина його буде:

$$(\pi n) = \frac{a_{A_1A}^n}{\mu_a} = \frac{0,43}{0,15} = 3,0 \text{мм.}$$

Через точки (n) і (κ) рис. 2.18,в проводимо напрямки прискорень $\bar{a}_{A_1O_1}^r$ і $\bar{a}_{A_1A}^r$ перетин цих ліній дасть точку (a_1) .

Прискорення точки В визначимо із пропорції:

$$(\pi b) = (\pi a_1) \cdot \frac{O_1B}{O_1A} = 66 \cdot \frac{91}{51} = 118 \text{мм.}$$

Отриманий відрізок відкладаємо вздовж вектора $(\overline{\pi a_1})$.

Для внутрішньої кінематичної пари С групи Ассур 2 класу 2 виду записуємо векторне рівняння прискорення:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^r.$$

Нормальне прискорення a_{CB}^n визначається за формулою:

$$a_{CB}^n = \omega_4^2 \cdot l_{BC} = 2,11^2 \cdot 0,19 = 0,85 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Направлене \bar{a}_{CB}^n вздовж ланки BC від точки C до точки B. Дотичне прискорення \bar{a}_{CB}^r перпендикулярне осі ланки BC, а прискорення a_c направлене паралельно вісі $(x-x)$.

Визначаємо відрізок (bn_1) , який зображає на плані прискорення a_{CB}^n :

$$(bn_1) = \frac{a_{CB}^n}{\mu_a} = \frac{0,85}{0,15} \approx 6 \text{мм.}$$

З отриманої точки n_1 проводимо лінію перпендикулярну осі ланки CB, а з полюса π проводимо лінію паралельну вісі $(x-x)$, в перетині двох ліній отримаємо точку (c) .

Побудувавши таким чином план прискорення ми можемо визначити невідомі по модулю величини лінійних та кутових прискорень:

$$a_{A_1A}^r = (ka_1) \cdot \mu_a = 23 \cdot 0,15 = 3,45 \frac{\text{М}}{\text{с}^2};$$

$$a_{A_1O_1}^\tau = (na_1) \cdot \mu_a = 66 \cdot 0,15 = 9,9 \frac{\text{М}}{\text{с}^2};$$

$$a_{CB}^\tau = (n_1c) \cdot \mu_a = 28 \cdot 0,15 = 4,2 \frac{\text{М}}{\text{с}^2};$$

$$a_{CB}^{\text{пов}} = (\pi c) \cdot \mu_a = 102 \cdot 0,15 = 15,3 \frac{\text{М}}{\text{с}^2};$$

$$a_B = (\pi b) \cdot \mu_a = 118 \cdot 0,15 = 17,7 \frac{\text{М}}{\text{с}^2};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{A_1O_1}^\tau}{l_{O_1A_1}} = \frac{9,9}{0,51} = 19,4 \text{с}^{-2};$$

$$\varepsilon_4 = \frac{a_{CB}^\tau}{l_{CB}} = \frac{4,2}{0,19} = 22,11 \text{с}^{-2}.$$

2.7. Контрольні питання

1. Які задачі ставляться перед інженером при кінематичному аналізі механізмів?
2. Що відноситься до кінематичних характеристик механізму?
3. Які методи кінематичного аналізу механізмів існують?
4. В чому суть синтезу важільних механізмів?
5. Що таке основні і допоміжні умови синтезу?
6. Як визначається коефіцієнт зміни середньої швидкості?
7. Які методи синтезу механізму існують?
8. Для яких цілей необхідні знання траєкторії руху точок механізму?
9. Як будується план положення механізму?

10. Що таке масштаб і в чому його фізична суть?
11. Що таке кінематична діаграма.?
12. Як будуються діаграми переміщення, швидкості, прискорення?
13. За якими формулами визначаються масштаби кінематичних діаграм?
14. Які рухи точки називаються переносними, відносними і абсолютними?
15. Як формулюється теорема додавання швидкостей?
16. Як визначити швидкість у відносному русі?
17. Що потрібно знати при підрахунку кутової швидкості ланки?
18. Що таке масштаб плану швидкостей?
19. Яка послідовність побудови плану швидкостей важільного механізму?
20. Як застосовується теорема подібності при побудові планів швидкостей (прискорень)?
21. Як визначається модуль нормального прискорення і куди направлений вектор цього прискорення?
22. Куди направлений вектор дотичного прискорення? Як визначається його модуль?
23. В яких випадках і як визначається величина і напрям Коріолісового прискорення?
24. В чому суть аналітичного дослідження механізмів?