УДК 519.115.1: 519.175.3

Саприкіна Ю.С., Мазур С.Ю., Кадубовський О.А.

[1]*Студенка 5 курсу 2 групи фізико-математичного факультету СДПУ,*
[2]*Студет 5 курсу 2 групи фізико-математичного факультету СДПУ,*
[3]*Доцент кафедри геометрії та методики викладання математики СДПУ*

Двокольорові *O*–діаграми з одним чорним циклом

Встановлено формули для підрахунку числа як неізоморфних (під дією циклічної групи), так і нееквівалентних (відносно дії діедральної групи) двокольорових $O-$діаграм з n хордами, які мають один цикл певного кольору.

Ключові слова: *хордова діаграма, цикл, циклічна група, група діедра, лема Бернсайда.*

1. Основні поняття та визначення.

Означення 1.1. Нехай на площині задане коло і $2n$ точок на ньому, які є вершинами правильного $2n-$кутника. Розіб’ємо ці точки на n пар і з’єднаємо кожну таку пару хордою. Отриману конструкцію (коло з n хордами на ньому) називають хордовою діаграмою з n хордами або ж $n-$діаграмою (рис. 1 $a),b)$).

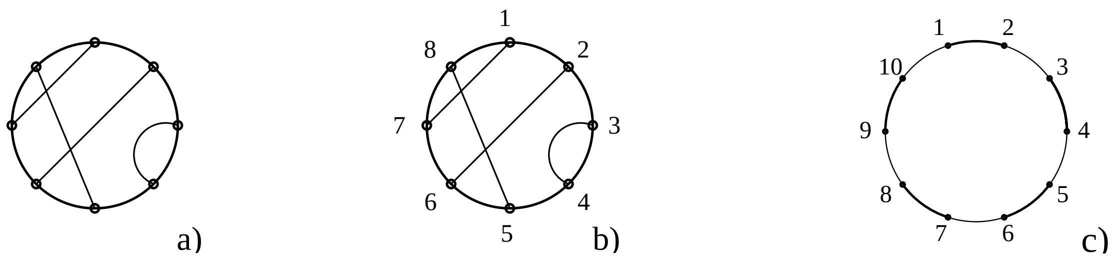


Рис. 1. $a),b)$ **Хордова $4-$діаграма;** $c)$ $2-$**кольоровий** $2n-$**шаблон**

Означення 1.2. Циклом $n-$діаграми будемо називати послідовність хорд і дуг кола, які утворюють гомеоморфний образ орієнтованого кола – рис. 2.

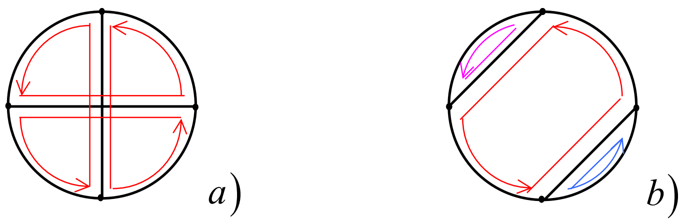
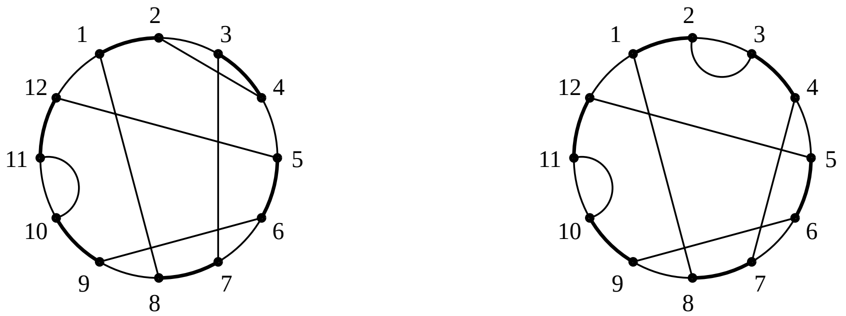


Рис. 2. $a)$ $2-$**діаграма з 1-им циклом;** $b)$ $2-$**діаграма з 3-ма циклами**

Означення 1.3 $2-$кольоровою хордовою діаграмою будемо називати $n-$діаграму, дуги кола якої по черзі розфарбовано у два кольори так, що будь-які сусідні дуги різного кольору. Надалі $2-$кольорову $n-$діаграму будемо позначати D^*, а множину всіх таких діаграм – $\mathfrak{I}_n^*$.

Означення 1.4 $B-$циклом ($W-$циклом) діаграми $D^*(\alpha)$ будемо називати послідовність хорд та чорних (білих) дуг, які утворюють гомеоморфний образ (орієнтовного) кола.

Приклад 1.1 Визначення чорних і білих циклів двокольорової діаграми проілюструємо на прикладі діаграми, зображеної на рис. 3 $a)$.



a) b)

Рис. 3: a**)** $2-$**кольорова** $N-$**діаграма;** b**)** $2-$**кольорова** $O-$**діаграма**

Довільним чином задамо орієнтацію на колі діаграми $D^* = D^*(\alpha)$ (наприклад проти руху годинникової стрілки).

Випишемо всі чорні цикли діаграми:

$B_1 = (2,1)[1,8](8,7)[7,3](3,4)[4,2]$; $B_2 = (6,5)[5,12](12,11)[11,10](10,9)[9,6]$.

Тут $(\cdot,\cdot)$ – дуги діаграми; $[\cdot,\cdot]$ – її хорди.

Аналогічно визначаються білі цикли діаграми:

$W_1 = (3,2)[2,4](4,5)[5,12](12,1)[1,8](8,9)[9,6](6,7)[7,3]$; $W_2 = (11,10)[10,11]$.

Означення 1.5 $2-$кольорову $n-$діаграму, яка не містить (містить) хорд, що сполучають вершини з номерами однакової парності, будемо називати $O-$діаграмою ($N-$діаграмою), а множину таких діаграм позначати $\Im_n^O$ ($\Im_n^N$).

Зауваження 1.1 Якщо проігнорувати кольори, то кожний чорний (білий) цикл $2-$кольорової $O-$діаграми (див. наприклад рис. 3 $b)$) співпадає з відповідним циклом звичайної діаграми.

Означення 1.6 Множину $2-$кольорових $O-$діаграм з одним чорним (або білим) циклом, побудованих на двокольоровому $2n-$шаблоні (див. рис. 1 $c)$) будемо позначати $\Im_{1,n}$.

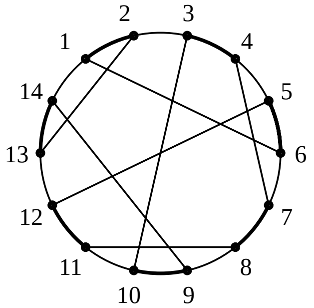
Означення 1.7 Дві діаграми D_1^* і D_2^* називають ізоморфними, якщо одну можна одержати з іншої в результаті повороту навколо спільного центру.

Означення 1.8 Дві діаграми D_1^* і D_2^* називають еквівалентними, якщо вони є або ізоморфними, або ж одну можна одержати з іншої в результаті перевороту (дзеркального відбиття) та подальшого повороту навколо спільного центру.

Більш повну інформацію можна знайти, наприклад в [3], [4], або ж попередній статті.

2. Число $O-$діаграми з одним чорним циклом.

Орієнтуємо коло $2-$кольорової діаграми, наприклад, проти руху годинникової стрілки (рис. 4). Тоді кожну $O-$діаграму з одним чорним циклом можна подати у вигляді циклу довжини n. Пояснимо останнє



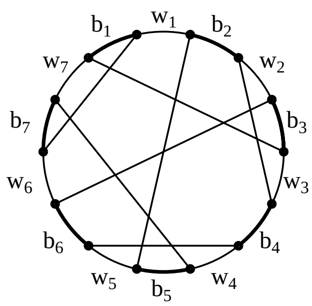


Рис. 4 Діаграма $D(b)\in\Im_{1,n}$, $b=(b_1,b_3,b_6,b_4,b_2,b_5,b_7)$

Під *обходом* b чорних (білих) дуг b_j (w_j) $O-$діаграми з одним чорним циклом (починаючи з вершини номера $2m_1$ деякої чорної дуги b_{m_1} будемо розуміти послідовність номерів чорних дуг $b=\left(b_{m_1},b_{j_2},...,b_{j_n}\right)$, які зустрічаються при слідуванні за єдиним чорним її циклом (рис. 4).

Очевидно, що два обходи дуг одного кольору задають одну й ту ж діаграму, якщо послідовність дуг одного одержується з послідовності дуг іншого в результаті циклічної їх перестановки. Геометрично це означає, що обхід дуг діаграми був розпочатий з іншої дуги, але в тому ж напрямку.

Щоб уникнути такої неоднозначності, достатньо обхід єдиного чорного циклу починати з дуги b_1. Оскільки всі діаграми будуються на основі шаблону, то (при фіксованій орієнтації) кожен такий цикл (обхід) однозначно визначає хорди діаграми, а отже й саму діаграму. І навпаки.

Зрозуміло, що для $O-$діаграм з одним чорним циклом перестановка b є циклом довжини n. Надалі множину циклів довжини

Не важко встановити, що число всіх $O-$діаграм з одним чорним (білим) циклом становить $(n-1)!$. Дійсно, кожну таку діаграму однозначно можна подати у вигляді циклу $(1,j_2,j_3,...,j_n)$, $j_k\neq j_{k'}$ при $k\neq k'$, де $j_k\in\{2,3,...,n\}$ – номери дуг відповідного кольору. Таким чином

$$\left|\Im_{1,n}\right|=(n-1)!. \tag{1}$$

3. Число неізоморфних $O-$діаграм з одним чорним (білим) циклом

З'ясуємо питання про те, коли дві $O-$діаграм з одним чорним (або білим) циклом є ізоморфними. Без втрати загальності міркування проведемо для $O-$діаграм з одним, саме чорним циклом.

Нехай $D(b)$, $b=(1,j_2,j_3,...,j_n)$ – $O-$діаграма з одним чорним циклом.

Розглянемо цикл $b'=(1+k \bmod n, j_2+k \bmod n, j_3+k \bmod n,...,j_n+k \bmod n)$.

Очевидно, що діаграма $D(b')$ ізоморфна діаграмі $D(b)$. Більше того, не важко встановити справедливість наступного твердження

Твердження 3.1 Дві $O-$діаграми $D(b)$ і $D(b')$ з одним чорним циклом ізоморфні тоді і лише тоді, коли існує таке натуральне k, що справджується рівність $b' = b + k \bmod n = (1 + k \bmod n, j_2 + k \bmod n, ..., j_n + k \bmod n)$

Нагадаємо, що два цикли $c_1, c_2 \in CS_n$ (довжини n), один з яких одержується в результаті циклічної перестановки елементів іншого не різнять.

Таким чином, задача про підрахунок числа d_n^* неізоморфних $O-$діаграм з одним чорним циклом звелась до задачі про підрахунок числа всіх нееквівалентних циклів з CS_n відносно дії групи Z_n.

В роботі [2] (див. також [1]) було встановлено, що число d_n^* орбіт дії групи Z_n на множині циклів з CS_n може бути обчислене за формулою:

$$d_n^* = \left| CS_n / nZ_n \right| = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\sum_{i|n} \phi^2\left(\frac{n}{i}\right) \cdot i! \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^i \right). \qquad (2)$$

Перепишемо праву частину (2) у вигляді, який найбільше відповідає введеним позначенням і потребам:

$$\frac{1}{n^2} \cdot \left(\sum_{i|n} \phi^2\left(\frac{n}{i}\right) \cdot i! \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^i \right) = \frac{1}{n^2} \cdot \left(n! + \sum_{i|n, i\neq n} \phi^2\left(\frac{n}{i}\right) \cdot i! \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^i \right) =$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \left(n! + n \cdot \sum_{i|n, i\neq n} \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot (i-1)! \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^{i-1} \cdot \phi\left(\frac{n}{i}\right) \right) = \frac{1}{n} \cdot \left(\left| \Im_{1,n} \right| + \sum_{i|n, i\neq n} \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \mathrm{Fix}_{\Im_{1,n}}\left(\xi^i\right) \right). \qquad (3)$$

Таким чином, справедливим є наступне твердження

Теорема 3.1 Число $d_{\Im_{1,n}}\left(C_{2n}^*\right)$ неізоморфних $O-$діаграм з одним чорним циклом може бути обчислене за допомогою співвідношень

$$d_n^* = d_{\Im_{1,n}}\left(C_{2n}^*\right) = \frac{1}{n} \cdot \left(\left| \Im_{1,n} \right| + \sum_{i|n, i\neq n} \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \mathrm{Fix}_{\Im_{1,n}}\left(\xi^i\right) \right), \qquad (4)$$

$$\mathrm{Fix}_{\Im_{1,n}}\left(\xi^i\right) = \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot (i-1)! \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^{i-1}, \text{ де} \qquad (5)$$

$\mathrm{Fix}_{\Im_{1,n}}\left(\xi^i\right)$ – число діаграм з класу $\Im_{1,n}$, для яких перестановка ξ^i є автоморфізмом, тобто число діаграм з $\Im_{1,n}$, які самосуміщаються при повороті на кут $\omega_i = \frac{\pi}{n} \cdot 2i$ (за годинниковою стрілкою).

Зауваження 3.1 Міркування, за допомогою яких встановлена істинність останнього твердження, носять суто алгебраїчний характер та залишають за лаштунками всю геометричну картину. У зв'язку з цим наведемо комбінаторно-геометричне доведення цього твердження.

Очевидно, що для доведення теореми 3.1 достатньо показати справедливість співвідношення (5).

Лема 3.1 Нехай $n = i \cdot k, i \neq n$. Тоді число $\operatorname{Fix}_{\Im_{1,n}}\left(\xi^{i}\right)$ $O-$діаграм з одним чорним циклом, які самосуміщаються при повороті на кут $\omega_i = \frac{\pi}{n} \cdot 2i$ становить

$$\operatorname{Fix}_{\Im_{1,n}}\left(\xi^{i}\right) = \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot (i-1)! \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^{i-1}.$$

Доведення. 1) З'ясуємо спочатку питання про те, який вид мають $O-$діаграми, що задовольняють умові леми. Як було встановлено раніше, кожну таку діаграму можна ототожнити з циклом $b = \left(1, l_2, l_3, ..., l_n\right)$, елементи якого – номери чорних дуг діаграми, що зустрічаються при обході єдиного чорного циклу (див. рис. 4). Отже, нехай $D = D(b)$ – $O-$діаграма з одним чорним циклом, яка самосуміщається при повороті на кут $\omega_i = \frac{\pi}{n} \cdot 2i$.

Як і раніше, арифметичні операції слід розуміти як такі, що виконуються за модулем n або ж $2n$. Основна **ідея** полягає у наступному:

якщо $O-$діаграма, яка само суміщається при повороті на кут $\frac{\pi}{n} \cdot 2i$, містить хорду $\left[1, 2l_2\right]$, то вона повинна містити й хорду $\left[1+2i, 2l_2+2i\right]$, в яку переходить перша. За тих самих причин діаграма містить й хорду $[1+4i, 2l_2+4i]$, в яку переходить друга і т.д. Таким чином:

якщо впорядкована пара $\{1, l_2\} \in b$, то циклу b повинна належати й впорядкована пара $\{1+i, l_2+i\}$, аналогічно $\{1+2i, l_2+2i\} \in b$ ... $\{1+i(k-1), l_2+i(k-1)\} \in b$;

якщо впорядкована пара $\{l_2, l_3\} \in b$, то циклу b повинна належати й впорядкована пара $\{l_2+i, l_3+i\}$, аналогічно $\{l_2+2i, l_3+2i\} \in b$ ... $\{l_2+i(k-1), l_3+i(k-1)\} \in b$.

Таким чином, множина чорних дуг діаграми з $\Im_{1,n}$, яка самосуміщається при повороті на кут $\frac{\pi}{n} \cdot 2i$, розбивається на k підмножин – "чорних" блоків $[b_j]$, в кожному з яких по i чорних дуг:

$$\left[b_1\right] = \{1, l_2, l_3, ..., l_i\},$$
$$\left[b_2\right] = \{1+i, l_2+i, l_3+i, ..., l_i+i\},$$
$$\left[b_3\right] = \{1+2i, l_2+2i, l_3+2i, ..., l_i+2i\}, \; ...,$$
$$\left[b_k\right] = \{1+(k-1)i, l_2+(k-1)i, l_3+(k-1)i, ..., l_i+(k-1)i\}$$

Однак, поки незрозумілим є порядок входження блоків $[b_2],[b_3],..,[b_k]$ до циклу $b = ([b_1]...)$ такої діаграми.

2) Взаємне розташування цих блоків однозначно визначається вибором блоку, який слідує за $[b_1]$. Більше того, в деякому розумінні, обхід цих блоків здійснюється з деяким кроком h. Пояснимо останнє:

Припустимо, що $b=([b_1][b_2]...)=\left(1,l_2,l_3,...,l_i;1+i,l_2+i,l_3+i,...,l_i+i;...\right)$. Оскільки циклу b належить впорядкована пара $\{l_i,1+i\}$, то $\{l_i+i,1+2i\}\in b$. Це означає, що після блоку $\left[b_2\right]$ слідує блок $\left[b_3\right]$ і т.д.. Тобто $b=\left([b_1][b_2][b_3]...[b_k]\right)$. Отже, обхід блоків здійснюється з кроком $h=1$;

Припустимо, що

$$b=\left([b_1][b_3]...\right)=\left(1,l_2,l_3,...,l_i;1+2i,l_2+2i,l_3+2i...,l_i+2i;...\right)$$

Оскільки циклу b належить впорядкована пара $\{l_i,1+2i\}$, то $\{l_i+i;1+3i\}\in b$, а отже і пара $\{l_i+2i;1+4i\}\in b$. Це означає, що після блоку $[b_3]$ слідує блок $[b_5]$ і т.д.. Тобто, $b=\left([b_1][b_3][b_5]...\right)$. Отже, обхід блоків здійснюється з кроком $h=2$.

Таким чином, маємо рівно $(k-1)$ можливостей перегрупувати чорні блоки. Але не в кожному з цих випадків ми одержимо діаграму з одним чорним циклом. Так, наприклад, для парних k обхід з кроком $h=2$ не є припустимим, оскільки відповідна діаграма має два чорні цикли $\left([b_1],[b_3],...[b_{k-1}],[b_1]\right)$ і $\left([b_2],[b_4],...[b_k],[b_2]\right)$.

Очевидно, що діаграма буде мати один чорний цикл лише у випадку коли обхід відповідних чорних блоків здійснюється з кроком h, взаємно простим з $k=\frac{n}{i}$. Тобто існує точно $\phi\left(k\right)$ суттєво різних видів таких діаграм.

3) Зафіксуємо припустимий крок h (взаємно простий з k), з яким здійснюється обхід k чорних блоків $[b_1],[b_2],...,[b_k]$.

Очевидно, що дугу b_{l_2} блоку $[b_1]$ можна вибрати $n-k$ способами, оскільки k чорних дуг з номерами $1,1+i,...,1+i(k-1)$ зайняли перші позиції в блоках $[b_1],[b_2],...,[b_k]$;

дугу b_{l_3} можна вибрати $n-2k$ способами, бо після вибору чорної дуги з номером l_2 дуги з номерами $l_2,l_2+i,...,l_2+i(k-2)$ зайняли другі позиції у відповідних блоках, і т.д.

Отже, при кожному припустимому кроці h можна утворити точно

$$(n-k)\cdot(n-2k)\cdot...\cdot(n-(i-1)k)=(ik-k)\cdot(ik-2k)\cdot...\cdot(ik-(i-1)k)=$$

$$=k(i-1)\cdot k(i-2)\cdot k(i-3)\cdot...\cdot k=k^{i-1}\cdot(i-1)!=\left(\tfrac{n}{i}\right)^{i-1}\cdot(i-1)!$$

різних $O-$діаграм з одним чорним циклом, які само суміщаються при повороті на кут $\omega=\frac{\pi}{n}\cdot 2i$.

З урахуванням пунктів 2) і 3) існує точно $\phi\left(\frac{n}{i}\right)\cdot\left(\frac{n}{i}\right)^{i-1}\cdot(i-1)!$ різних діаграм, що задовольняють умові леми. □

Зауваження 3.2. Є більш глибокі причини, що характеризують геометричний зміст і природу величин, що входять у формулу (5). Так, наприклад, величина $(i-1)!$ – це число $O-$діаграм (з i хордами) з одним чорним циклом.

Основна ідея полягає в справедливості наступних тверджень, які наведемо без доведення

1) Нехай $b^i=(1,q_2,q_3,...,q_i)$ – одна з $(i-1)!$ $O-$діаграм (з i хордами) з одним чорним циклом. Тоді, поклавши $[b_1]=\{1,q_2,q_3,...,q_i\}$, однозначно визначаються чорні блоки $[b_2],[b_3],...,[b_k]$. При цьому:

1.1) при довільному припустимому кроці h, з яким здійснюється обхід цих блоків, відповідна діаграма $b=([b_1]...)$ задовольняє умові леми;

1.2) при довільній циклічній перестановці елементів однієї позиції, діаграма знову задовольняє умові леми;

Звідки випливає, що здійснивши всі можливі циклічні перестановки в кожній з $i-1$ позицій (перша позиція в кожному з блоків фіксована), ми одержимо точно $\left(\frac{n}{i}\right)^{i-1}=k^{i-1}$ різних діаграм з $\mathfrak{I}_{1,n}$, які задовольняють умовам леми.

2) Якщо ж $b^i=(1,q_2,q_3,...,q_i)$ не є $i-$діаграмою з одним чорним циклом, то при жодному h та ні при яких циклічних перестановках елементів однієї позиції, ми не одержимо діаграму, що задовольняє умовам леми.

4. Число нееквівалентних $O-$діаграм з одним чорним циклом

Застосовуючи лему Бернсайда (див. напр. [3]), не важко встановити, що число $d_n^{**}=d_{\mathfrak{I}_{1,n}}\left(D_{2n}^*\right)$ орбіт групи діедра D_{2n}^*, що діє на множині $\mathfrak{I}_{1,n}$ (число нееквівалентних $O-$діаграм з одним чорним циклом) визначається за допомогою співвідношень

$$d_n^{**}=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(d_n^*+Z_1(n)\right), & n=2m+1\\ \frac{1}{2}\left(d_n^*+\frac{1}{2}\cdot\left(Z_{2,1}(n)+Z_{2,2}(n)\right)\right), & n=2m,\end{cases}\quad \text{де} \tag{6}$$

$Z_1(n)$ – число діаграм з $\mathfrak{I}_{1,n}$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних чорної та білої дуг шаблону;

$Z_{2,1}(n)$ $\left(Z_{2,2}(n)\right)$ – число діаграм з $\mathfrak{I}_{1,n}$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, що проходить через середини протилежних чорних (білих) дуг шаблону.

Лема 4.1. Справедливими є наступні рівності

$$\begin{aligned}&Z_1(n)=2^m\cdot m!, && n=2m+1\\ &Z_{2,1}(n)=2^{m-1}\cdot(m-1)!, && n=2m\\ &Z_{2,2}(n)=2^{m-1}\cdot m!, && n=2m\end{aligned} \tag{7}$$

Доведення.

1) Розглянемо спочатку випадок, коли $n = 2m+1$ – рис. $2\,c)$. Кожну діаграму симетричну відносно певної осі симетрії, що проходить через середини протилежних білої і чорної дуг (наприклад відносно осі l_1) можна подати у вигляді циклу

$$\left(b'_{i_m}, b'_{i_{m-1}}, \dots, b'_{i_3}, b'_{i_2}, \boxed{b_1}, b_{i_2}, b_{i_3}, \dots, b_{i_{m-1}}, b_{i_m}\right),$$

де b'_{i_k} – дуга симетрична дузі b_{i_k} відносно осі l_1, $i_k \neq 1$.

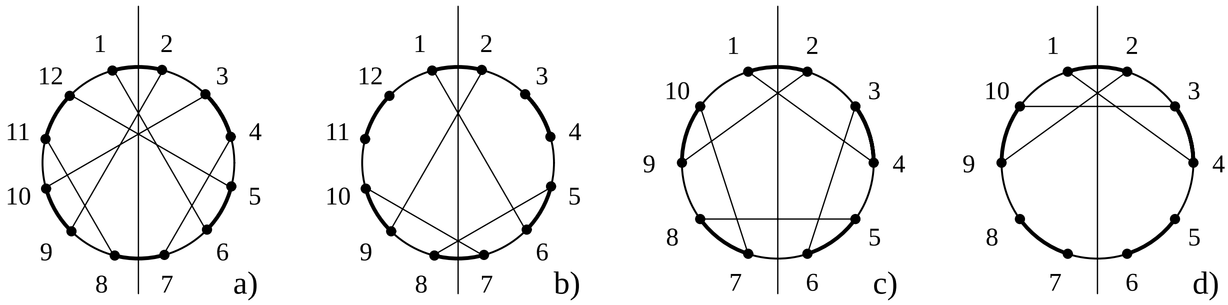


Рис. 5 $O-$**діаграми симетричні відносно фіксованої осі симетрії**

Дугу b_{i_2} можна обрати $(n-1)$ способом, при цьому з подальшого розгляду виключається й дуга симетрична обраній; дугу b_{i_3} – $(n-3)$ способами; ... ; дугу $b_{i_{m-2}}$ – 4 а дугу $b_{i_{m-1}}$ – 2 способами. Тому при $n = 2m+1$ маємо

$$Z_1(n) = (n-1)(n-3)\dots 1 = 2(m)2(m-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = 2^m \cdot m! \qquad (8)$$

2) Розглянемо тепер випадок коли $n = 2m$ – рис. $5\,a)$.

2.1) Кожну діаграму симетричну відносно певної осі симетрії, що проходить через середини протилежних чорних дуг (наприклад, відносно осі l_{b_1}) можна подати у вигляді циклу

$$\left(b'_{i_{m-1}}, \dots, b'_{i_3}, b'_{i_2}, \boxed{b_1}, b_{i_2}, b_{i_3}, \dots, b_{i_{m-1}}, \boxed{b_{m+1}}\right),\ b'_{m+1} = b_{m+1},$$

де b'_{i_k} – дуга симетрична дузі b_{i_k} відносно осі l_{b1}, $i_k \neq 1, i_k \neq m+1$.

Тоді дугу b_{i_2} можна обрати $(n-2)$ способами, при цьому з подальшого розгляду виключається й дуга симетрична обраній (щоб запобігти ситуації, зображеної на рис. $5\,c)$); дугу b_{i_3} – $(n-4)$ способами; ...; дугу $b_{i_{m-2}}$ – 4 способами; дугу $b_{i_{m-1}}$ – 2 способами. Таким чином, при $n = 2m$ маємо

$$Z_{2,1}(n) = (n-2)(n-4)\dots 2 =$$

$$= (2m-2)(2m-4)\dots 2 = 2(m-1)2(m-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = 2^{m-1}\cdot(m-1)! \qquad (9)$$

Та обставина, що чорна дуга b_{m+1} ніби "замикає" послідовність чорних дуг діаграми є суттєвою, бо при іншому її розташуванні відносно дуги b_1 виникає ситуація подібна до тієї, яка зображена на рис. $5\,b)$, коли симетрична діаграма має більше одного чорного циклу.

2.2) Всі діаграми симетричні відносно осі, що проходить через середини протилежних білих дуг (наприклад, відносно l_{w1}) можна подати у вигляді одного з m можливих (для нашої ситуації) циклів виду

$$\left(b'_{i_m},\ldots,b'_{i_4},b'_{i_3},\boxed{b_2},\boxed{b_1},b_{i_3},b_{i_4},\ldots,b_{i_m}\right),$$

$$\left(b'_{i_{m-1}},\ldots,b'_{i_4},b'_{i_3},\boxed{b_2},b_{i_m},b'_{i_m}\boxed{b_1},b_{i_3},b_{i_4},\ldots,b_{i_{m-1}}\right),$$

$$\ldots$$

$$\left(\boxed{b_2},b_{i_3},b_{i_4},\ldots,b_{i_m},b'_{i_m},\ldots,b'_{i_4},b'_{i_3},\boxed{b_1}\right),$$

де b'_{i_k} – дуга симетрична дузі b_{i_k} відносно осі l_{w1}, $i_k \neq 1, i_k \neq m+1$.

Тоді, з урахуванням пункту 2.1, не важко зробити висновок, що при $n = 2m$

$$Z_{2,2}(n) = m \cdot 2^{m-1} \cdot (m-1)! \tag{10}$$

□

Теорема 4.1 Число нееквівалентних діаграм з класу $\Im_{1,n}$ можна обчислити за допомогою співвідношень

$$d_n^{**} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(d_n^* + 2^m \cdot m!\right), & n = 2m+1 \\ \frac{1}{2}\left(d_n^* + 2^{m-2} \cdot (m+1) \cdot (m-1)!\right), & n = 2m. \end{cases} \tag{11}$$

Доведення є наслідком Леми 4.1 та співвідношень (6).

Нижче наведено неізоморфні діаграми з класу $\Im_{1,n}$ для початкових $n = 4;5;6$.

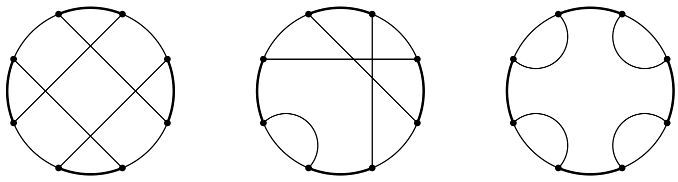


Рис. 6 Всі неізоморфні діаграми з класу $\Im_{1,4}$

Наведені діаграми є нееквівалентними. Тому $d_4^{**} = 3$.

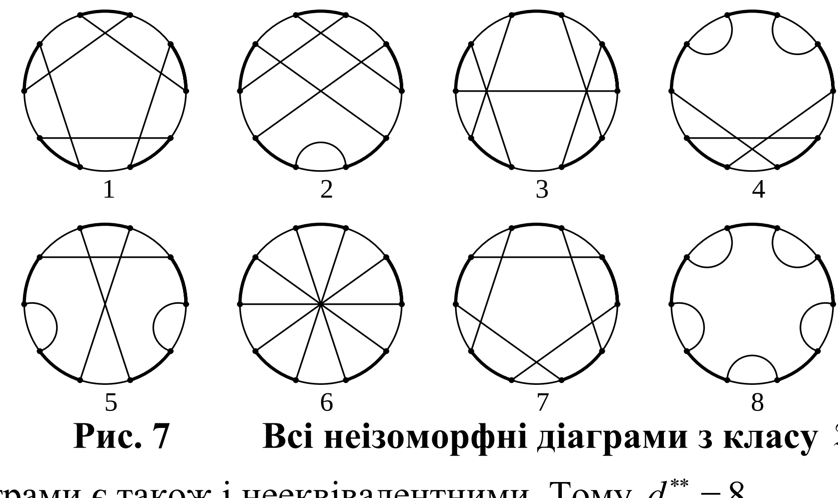


Рис. 7 Всі неізоморфні діаграми з класу $\Im_{1,5}$

Наведені діаграми є також і нееквівалентними. Тому $d_5^{**} = 8$.

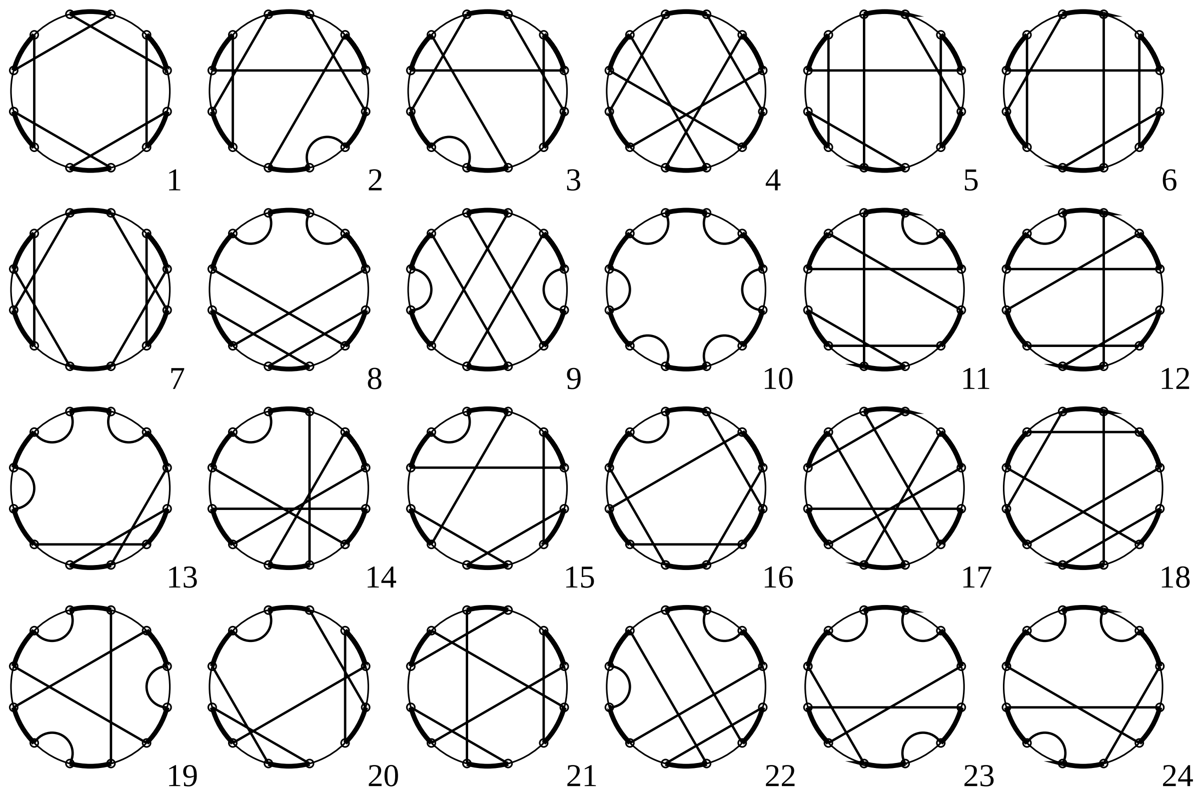


Рис. 8 Всі неізоморфні діаграми з класу $\Im_{1,6}$.

Оскільки еквівалентними є наступні пари діаграм: 2 і 3; 5 і 6; 11 і 12; 23 і 24, то $d_6^{**} = 20$.

На думку авторів дослідження в цьому напрямку можуть бути успішно продовжені за рахунок розв'язування задач на підрахунок числа нееквівалентних $O-$діаграм з фіксованими числами циклів кожного кольору.

Одержані в роботі результати можуть бути ефективно використані в тих галузях науки, де виникають інваріанти, схожі до кола з відміченими точками. Відомо, що вказані обєкти виникають в біології. З деякими застосуваннями двокольорових діаграм в топології можна ознайомитись в роботі [4].

Література

1. *J.E.A. Steggall* On the numbers of patterns which can be derived from certain elements // Messenger Math., 37:56–61, 1907.

2. *Vella A.* Pattern avoidance in permutations: linear and cyclic orders // The electronic journal of combinatorics №10, 2003.

3. *Калужнин Л.А., Сущанский В.И.* Преобразования и перестановки // М.: Наука. 1979.

4. *Кадубовський О.* Про один клас хордових діаграм максимального роду // Вісник Київського університету Серія: фізико-математичні науки, Вип. 1, 2006, с. 17–27.