

ПРО ОДНУ КОМБІНАТОРНУ ТОТОЖНІСТЬ ДЛЯ ЧИСЕЛ КАТАЛАНА ТА НАРАЯНА

Кадубовський Олександр Анатолійович

кандидат фіз.-мат. н., доцент кафедри геометрії та методики викладання математики
ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»

kadubovs@ukr.net

Добре відомо (напр. [1], [2]), що числа Каталана C_n («Catalan numbers») та Нараяна $N(n; k)$ («Narayana numbers») зустрічаються в багатьох комбінаторних задачах та знаходять застосування в різних галузях математики.

Нагадаємо, що числа C_n для невід'ємних цілих n визначаються рівністю

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n},$$

а числа $N(n; k)$ для натуральних n і $1 \leq k \leq n$ — за допомогою рівності

$$N(n; k) = \frac{1}{n} C_n^k C_n^{k-1} = \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1}.$$

Не важко перевірити, що має місце рівність

$$N(n; k) = N(n; n - k + 1)$$

та добре відомо (напр. [1, Ex. 6.36(a)]), що для зазначених чисел справджується тотожність

$$\sum_{k=1}^n N(n; k) = C_n.$$

З урахуванням результатів робіт [2] і [3], має місце наступне твердження

Теорема. *Для натуральних n має місце тотожність*

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{n+1} C_{2n}^n = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j|(n;k)} \phi(j) \cdot \frac{n-k+j}{j} \cdot N\left(\frac{n}{j}; \frac{n-k+j}{j}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j|(n;k-1)} \phi(j) \cdot \frac{k-1+j}{j} \cdot N\left(\frac{n}{j}; \frac{k-1+j}{j}\right) \right) - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i|n}} \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot (i+1) \cdot C_i, \end{aligned}$$

де: $\phi(q)$ — функція Ейлера (кількість натуральних чисел, менших за q та взаємно простих із ним); $(a; b)$ — найбільший спільний дільник натуральних a і b ; підсумовування в першому доданку із суми з правої частини ведеться за всіма дільниками j найбільшого спільного дільника $(n; k)$ чисел n і k , в другому доданку із суми — за всіма дільниками j найбільшого спільного дільника $(n; k-1)$ чисел n і $k-1$, а підсумовування в третьому доданку — за всіма дільниками i числа n .

1. Richard P. Stanley, Enumerative Combinatorics, Vol. 2, Cambridge University Press, 1999.

2. David Callan and Len Smiley, Noncrossing partitions under reflection and rotation, preprint, <https://arxiv.org/pdf/math/0510447v3>, 2005.

3. Кадубовський А.А. О числе топологически неэквивалентных функций с одной вырожденной критической точкой типа седло на двумерной сфере, II, Труды международного геометрического центра, 2015, Том 8, № 1, С. 46–61.