ДО ПИТАННЯ ПРО КЛАСИФІКАЦІЮ ПРЯМИХ ПРОСТОРУ В КУРСІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

О.А. Кадубовський,
канд. фіз.-мат. наук, доцент,
А.В. Алдошина,
студентка,
ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»,
м. Слов'янськ, УКРАЇНА
kadubovs@ukr.net, anastasiya.aldos@mail.ru

Висвітлюється авторський досвід формування у студентів-математиків педагогічних ВНЗ навичок узагальнення та конкретизації на прикладі вивчення теми «розташування прямої у просторі» шляхом змістового її наповнення питанням про класифікацію прямих простору за ознакою взаємного розташування відносно координатних осей і площин декартової системи координат.

***Ключові слова**: узагальнення та конкретизація, класифікація прямих простору, координатна вісь, координатна площина, критерії.*

Постановка проблеми. Традиційно, вивчення та виклад теми «Пряма у просторі» супроводжується розглядом частинних випадків розташування прямої відносно фіксованої декартової системи координат (надалі – ДСК). Якісний та кількісний аналіз теоретичного і дидактичного матеріалу, який міститься в більшості розповсюджених та рекомендованих підручниках і збірниках задач, дозволяє констатувати наступне:

1) Задачі, які відносяться до суттєво різних положень прямої у просторі (за ознакою взаємного розташування відносно координатних осей і площин ДСК), здебільшого, вичерпуються розглядом лише тих випадків, коли пряма є паралельною (співпадає) до певної координатної осі або ж є паралельною (належить) до певної координатної площини [2, 4, 7, 8].

2) Прямим загального положення майже не приділяється увага. Винятком, частково позбавленим зазначеної вади, є наприклад збірники [2, 4, 7], в яких у загальному вигляді пропонуються й задачі на дослідження критеріїв взаємного розташування прямих і площин простору.

3) Загалом, в тому чи іншому вигляді, зустрічаються щонайбільше 85 із 133 суттєво різних (у зазначеному вище контексті) типів прямих. Проте сам факт типізації прямих, як правило, затушовується. Класифікація прямих простору за вказаною ознакою в явному вигляді до сьогодні залишалась не висвітленим питанням навіть в теоретичному аспекті.

Аналіз актуальних досліджень. З дидактичною суттю загальних прийомів узагальнення і конкретизації та методикою формування їх в учнів на уроках стереометрії можна ознайомитися, наприклад, в [9]. Розумові прийоми, необхідні для активного засвоєння теми «Взаємне розміщення прямої і площини», докладно висвітлені в [4]. Крім того, в [4] наведено й основні способи (види) узагальнень, які характерні для процесу навчання аналітичної геометрії. Зокрема, *узагальнення за допомогою об'єднання двох чи декількох закономірностей в одну більш загальну закономірність*.

Узагальнення, що відповідають емпіричному і теоретичному рівням мислення, розглядались в дослідженнях С.Л. Рубінштейна і В.В. Давидова. Як зазначається в [4], традиційна методика навчання студентів розв'язувати задачі базується на використанні емпіричного узагальнення, недоліком якого є те, що при такому процесі обмежуються вивченням окремих явищ. Не розкриваються глибокі зв'язки між ними, зменшується роль логічного аналізу, все це стримує розвиток теоретичного мислення.

Метою статті є висвітлення авторського досвіду формування навичок узагальнення, що відповідають як емпіричному так і теоретичному рівням мислення на прикладі класифікації прямих простору за вказаною вище ознакою.

Виклад основного матеріалу. Пропонована класифікація прямих простору за вказаною вище ознакою представлена за допомогою наочної схеми 1 з подальшою деталізацією відносно введених позначень.

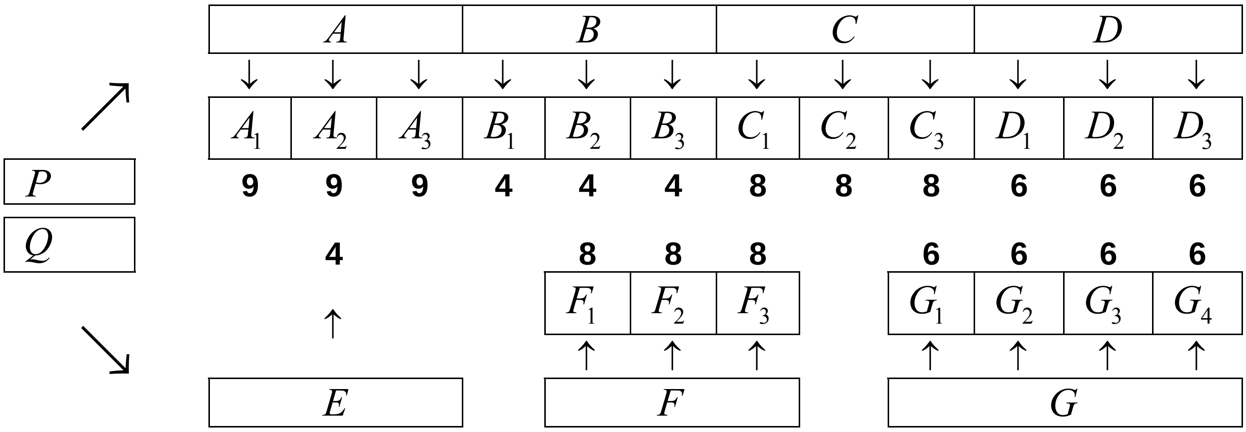


Схема 1: До класифікації прямих простору за ознакою взаємного розташування відносно координатних осей і площин афінної системи координат

I. P – множина прямих, паралельних до координатних площин

1.1) A – клас прямих, паралельних до координатних осей: A_1, A_2, A_3 – підкласи прямих, що є паралельними до координатних осей OX, OY і OZ відповідно;

1.2) B – клас прямих, що перетинають дві піввісі різних координатних осей: B_1, B_2, B_3 – підкласи прямих, що перетинають піввісі осей OY і OZ, піввісі осей OZ і OX та піввісі осей OX і OY відповідно;

1.3) C – клас прямих, що паралельні одній з координатних площин, не є паралельними до відповідних координатних осей та не перетинають третю вісь: C_1, C_2, C_3 – підкласи прямих, що є паралельними до площин YOZ, ZOX та XOY відповідно;

1.4) D – клас прямих, що перетинають координатну піввісь (початок координат), є паралельними (належать) відповідній площині та не є паралельними до жодної з двох інших координатних осей: D_1, D_2, D_3 – підкласи прямих, що перетинають осі OX, OY і OZ відповідно.

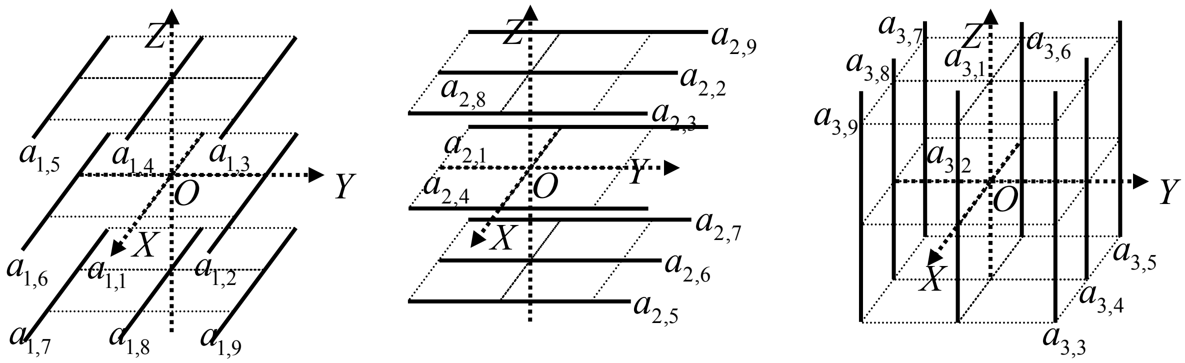
II. Q – множина прямих, що не є паралельними до жодної з координатних площин

2.1) E – клас прямих, що проходять через початок координат, не співпадають з жодною із координатних осей та не належать жодній з координатних площин;

2.2) F – клас прямих, що перетинають координатну піввісь та є мимобіжними до двох інших координатних осей: F_1, F_2, F_3 – підкласи прямих, що перетинають піввісь осей OX, OY і OZ відповідно;

2.3) G – клас прямих, що не є паралельними до жодної з координатних площин та не проходять через початок координат: G_1, G_2, G_3, G_4 – підкласи прямих, що перетинають чверть площини X_+OY_+, Y_+OX_-, X_-OY_- і Y_-OX_+ відповідно.

В подальшому без додаткових пояснень для існуючих типів прямих будуть наведені графічні ілюстрації та аналітичні умови, що визначають відповідне положення прямої відносно ДСК.



$a)$ $b)$ $c)$

Рис. 1: Прямі з класу A

$a_{1,i}$ – представники 9 можливих типів прямих підкласу A_1 (що є паралельними до осі OX) – рис. 1 $a)$; $a_{2,i}$ – представники 9 можливих типів прямих підкласу A_2 (що є паралельними до осі OY) – рис. 1 $b)$; $a_{3,i}$ – представники 9 можливих типів прямих підкласу A_3 (що є паралельними до осі OZ) – рис. 1 $c)$.

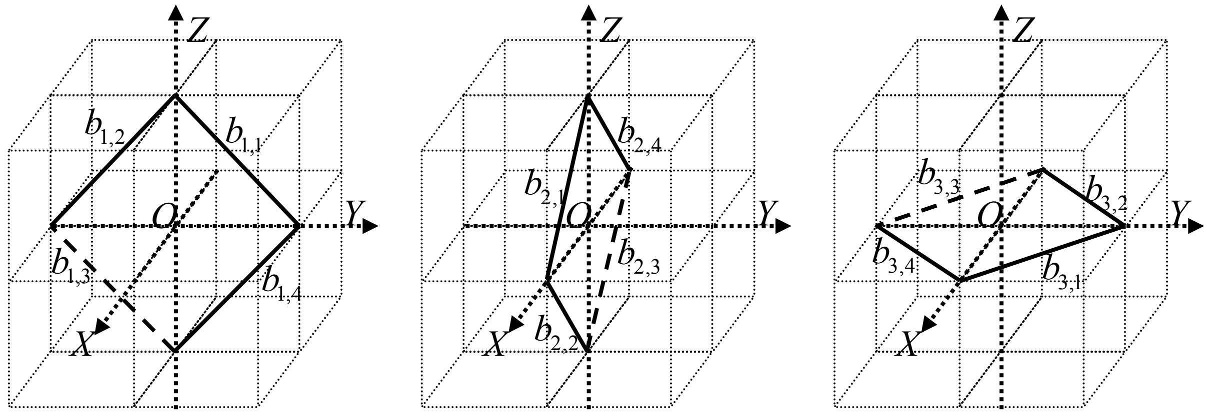
Нижче для кожного $i=\overline{1,...,9}$ наведено умови, за яких пряма $l:\dfrac{x-x_0}{l_1}=\dfrac{y-y_0}{l_2}=\dfrac{z-z_0}{l_3}$ «є представником» $a_{1,i}$ відповідного типу прямих.

1) $l \cong a_{1,1} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 \neq 0, l_2 = l_3 = 0 \\ y_0 = z_0 = 0 \end{cases}$ 2) $l \cong a_{1,2} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 \neq 0, l_2 = l_3 = 0 \\ y_0 > 0, z_0 = 0 \end{cases}$ 3) $l \cong a_{1,3} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 \neq 0, l_2 = l_3 = 0 \\ y_0 > 0, z_0 > 0 \end{cases}$

4) $l \cong a_{1,4} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 \neq 0, l_2 = l_3 = 0 \\ y_0 = 0, z_0 > 0 \end{cases}$ 5) $l \cong a_{1,5} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 \neq 0, l_2 = l_3 = 0 \\ y_0 < 0, z_0 > 0 \end{cases}$ 6) $l \cong a_{1,6} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 \neq 0, l_2 = l_3 = 0 \\ y_0 < 0, z_0 = 0 \end{cases}$

7) $l \cong a_{1,7} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 \neq 0, l_2 = l_3 = 0 \\ y_0 < 0, z_0 < 0 \end{cases}$ 8) $l \cong a_{1,8} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 \neq 0, l_2 = l_3 = 0 \\ y_0 = 0, z_0 < 0 \end{cases}$ 9) $l \cong a_{1,9} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 \neq 0, l_2 = l_3 = 0 \\ y_0 > 0, z_0 < 0 \end{cases}$

Встановлення аналітичних умов для відповідних типів прямих з підкласів A_2 і A_3 можна запропонувати студентам в якості неважкої вправи, яка з очевидними змінами повторює міркування для типів прямих з підкласу A_1.



$a)$ $b)$ $c)$

Рис. 2: Прямі з класу B

$b_{1,i}$ – представники 4 можливих типів прямих підкласу B_1 (що перетинають піввісі осей OY і OZ) – рис. 2 $a)$:

1) $b_{1,1} : \begin{cases} l_1 = 0, & l_2 \cdot l_3 < 0 \\ x_0 = 0, & z_0 > (l_3/l_2)\, y_0 \end{cases}$ 3) $b_{1,3} : \begin{cases} l_1 = 0, & l_2 \cdot l_3 < 0 \\ x_0 = 0, & z_0 < (l_3/l_2)\, y_0 \end{cases}$

2) $b_{1,2} : \begin{cases} l_1 = 0, & l_2 \cdot l_3 > 0 \\ x_0 = 0, & z_0 > (l_3/l_2)\, y_0 \end{cases}$ 4) $b_{1,4} : \begin{cases} l_1 = 0, & l_2 \cdot l_3 > 0 \\ x_0 = 0, & z_0 < (l_3/l_2)\, y_0 \end{cases}$

$b_{2,i}$ – представники 4 можливих типів прямих підкласу B_2 (що перетинають піввісі осей OZ і OX) – рис. 2 $b)$:

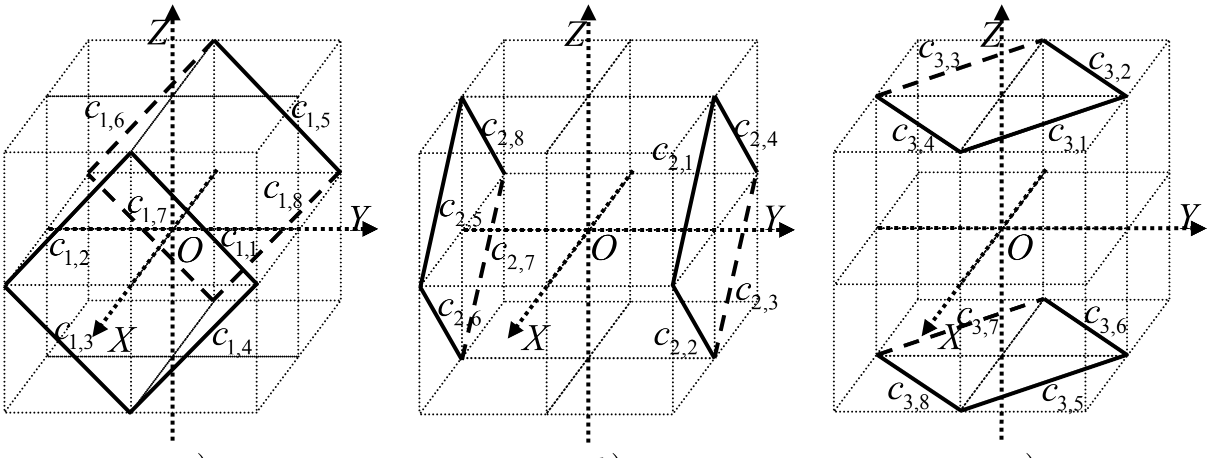
1) $b_{2,1} : \begin{cases} l_2 = 0, & l_3 \cdot l_1 < 0 \\ y_0 = 0, & x_0 > (l_1/l_3)\, z_0 \end{cases}$ 3) $b_{2,3} : \begin{cases} l_2 = 0, & l_3 \cdot l_1 < 0 \\ y_0 = 0, & x_0 < (l_1/l_3)\, z_0 \end{cases}$

2) $b_{2,2} : \begin{cases} l_2 = 0, & l_3 \cdot l_1 > 0 \\ y_0 = 0, & x_0 > (l_1/l_3)\, z_0 \end{cases}$ 4) $b_{2,4} : \begin{cases} l_2 = 0, & l_3 \cdot l_1 > 0 \\ y_0 = 0, & x_0 < (l_1/l_3)\, z_0 \end{cases}$

$b_{3,i}$ – представники 4 можливих типів прямих підкласу B_3 (що перетинають піввісі осей OX і OY) – рис. 2 c):

1) $b_{3,1}:\begin{cases} l_3=0, & l_1\cdot l_2<0 \\ z_0=0, & y_0>(l_2/l_1)x_0 \end{cases}$ 3) $b_{3,3}:\begin{cases} l_3=0, & l_1\cdot l_2<0 \\ z_0=0, & y_0<(l_2/l_1)x_0 \end{cases}$

2) $b_{3,2}:\begin{cases} l_3=0, & l_1\cdot l_2>0 \\ z_0=0, & y_0>(l_2/l_1)x_0 \end{cases}$ 4) $b_{3,4}:\begin{cases} l_3=0, & l_1\cdot l_2>0 \\ z_0=0, & y_0<(l_2/l_1)x_0 \end{cases}$



a) b) c)

Рис. 3: Прямі з класу C

$c_{1,i}$ – представники 8 можливих типів прямих підкласу C_1 (що є паралельними до площини YOZ) – рис. 3 a):

1) $c_{1,1}:\begin{cases} l_1=0; l_2\cdot l_3<0 \\ x_0>0; z_0>(l_3/l_2)y_0 \end{cases}$ 2) $c_{1,2}:\begin{cases} l_1=0; l_2\cdot l_3>0 \\ x_0>0; z_0>(l_3/l_2)y_0 \end{cases}$ 3) $c_{1,3}:\begin{cases} l_1=0; l_2\cdot l_3<0 \\ x_0>0; z_0<(l_3/l_2)y_0 \end{cases}$

4) $c_{1,4}:\begin{cases} l_1=0; l_2\cdot l_3>0 \\ x_0>0; z_0<(l_3/l_2)y_0 \end{cases}$ 5) $c_{1,5}:\begin{cases} l_1=0; l_2\cdot l_3<0 \\ x_0<0; z_0>(l_3/l_2)y_0 \end{cases}$ 6) $c_{1,6}:\begin{cases} l_1=0; l_2\cdot l_3>0 \\ x_0<0; z_0>(l_3/l_2)y_0 \end{cases}$

7) $c_{1,7}:\begin{cases} l_1=0; l_2\cdot l_3<0 \\ x_0<0; z_0<(l_3/l_2)y_0 \end{cases}$ 8) $c_{1,8}:\begin{cases} l_1=0; l_2\cdot l_3>0 \\ x_0<0; z_0<(l_3/l_2)y_0 \end{cases}$

$c_{2,i}$ – представники 8 можливих типів прямих підкласу C_2 (що є паралельними до площини ZOX) – рис. 3 b):

1) $c_{2,1}:\begin{cases} l_2=0; l_3\cdot l_1<0 \\ y_0>0; x_0>(l_1/l_3)z_0 \end{cases}$ 2) $c_{2,2}:\begin{cases} l_2=0; l_3\cdot l_1>0 \\ y_0>0; x_0>(l_1/l_3)z_0 \end{cases}$ 3) $c_{2,3}:\begin{cases} l_2=0; l_3\cdot l_1<0 \\ y_0>0; x_0<(l_1/l_3)z_0 \end{cases}$

4) $c_{2,4}:\begin{cases} l_2=0; l_3\cdot l_1>0 \\ y_0>0; x_0<(l_1/l_3)z_0 \end{cases}$ 5) $c_{2,5}:\begin{cases} l_2=0; l_3\cdot l_1<0 \\ y_0<0; x_0>(l_1/l_3)z_0 \end{cases}$ 6) $c_{2,6}:\begin{cases} l_2=0; l_3\cdot l_1>0 \\ y_0<0; x_0>(l_1/l_3)z_0 \end{cases}$

7) $c_{2,7}:\begin{cases} l_2=0; l_3\cdot l_1<0 \\ y_0<0; x_0<(l_1/l_3)z_0 \end{cases}$ 8) $c_{2,8}:\begin{cases} l_2=0; l_3\cdot l_1>0 \\ y_0<0; x_0<(l_1/l_3)z_0 \end{cases}$

$c_{3,i}$ – представники 8 можливих типів прямих підкласу C_3 (що є паралельними до площини XOY) – рис. 3 c):

1) $c_{3,1}:\begin{cases} l_3=0; l_1\cdot l_2<0 \\ z_0>0; y_0>(l_2/l_1)x_0 \end{cases}$ 2) $c_{3,2}:\begin{cases} l_3=0; l_1\cdot l_2>0 \\ z_0>0; y_0>(l_2/l_1)x_0 \end{cases}$ 3) $c_{3,3}:\begin{cases} l_3=0; l_1\cdot l_2<0 \\ z_0>0; y_0<(l_2/l_1)x_0 \end{cases}$

4) $c_{3,4}:\begin{cases} l_3=0; l_1\cdot l_2>0 \\ z_0>0; y_0<(l_2/l_1)x_0 \end{cases}$ 5) $c_{3,5}:\begin{cases} l_3=0; l_1\cdot l_2<0 \\ z_0<0; y_0>(l_2/l_1)x_0 \end{cases}$ 6) $c_{3,6}:\begin{cases} l_3=0; l_1\cdot l_2>0 \\ z_0<0; y_0>(l_2/l_1)x_0 \end{cases}$

7) $c_{3,7}:\begin{cases} l_3=0; l_1\cdot l_2<0 \\ z_0<0; y_0<(l_2/l_1)x_0 \end{cases}$ 8) $c_{3,8}:\begin{cases} l_3=0; l_1\cdot l_2>0 \\ z_0<0; y_0<(l_2/l_1)x_0 \end{cases}$

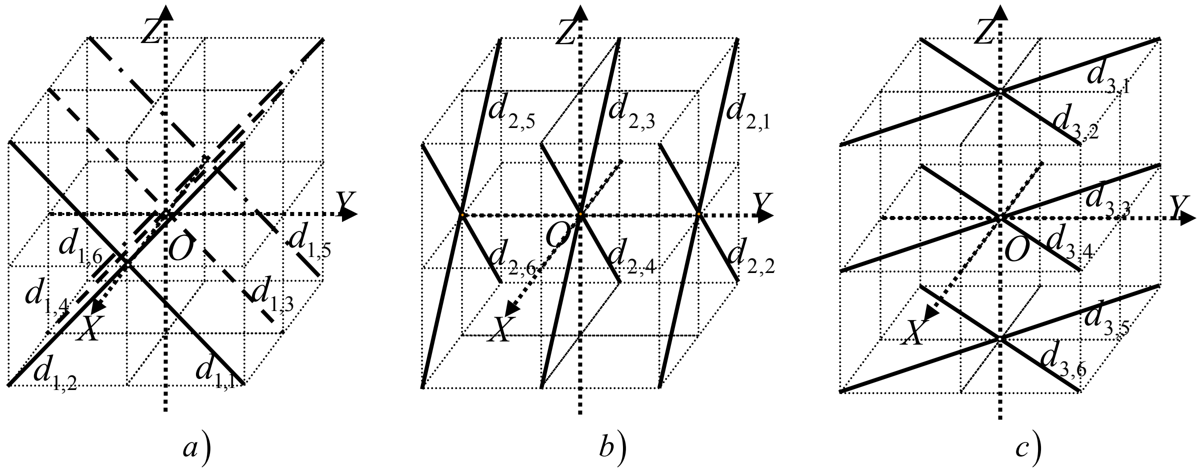


Рис. 4: Прямі з класу D

$d_{1,i}$ – представники 6 можливих типів прямих підкласу D_1 (що перетинають вісь OX) – рис. 4 a):

1) $d_{1,1}:\begin{cases} l_1=0, & l_2\cdot l_3<0 \\ x_0>0, & l_2z_0=l_3y_0 \end{cases}$ 2) $d_{1,2}:\begin{cases} l_1=0, & l_2\cdot l_3>0 \\ x_0>0, & l_2z_0=l_3y_0 \end{cases}$ 3) $d_{1,3}:\begin{cases} l_1=0, & l_2\cdot l_3<0 \\ x_0=0, & l_2z_0=l_3y_0 \end{cases}$

4) $d_{1,4}:\begin{cases} l_1=0, & l_2\cdot l_3>0 \\ x_0=0, & l_2z_0=l_3y_0 \end{cases}$ 5) $d_{1,5}:\begin{cases} l_1=0, & l_2\cdot l_3<0 \\ x_0<0, & l_2z_0=l_3y_0 \end{cases}$ 6) $d_{1,6}:\begin{cases} l_1=0, & l_2\cdot l_3>0 \\ x_0<0, & l_2z_0=l_3y_0 \end{cases}$

$d_{2,i}$ – представники 6 можливих типів прямих підкласу D_2 (що перетинають вісь OY) – рис. 4 b):

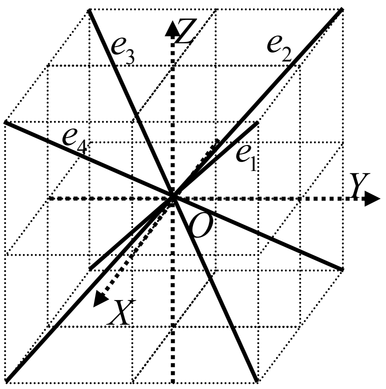
1) $d_{2,1}:\begin{cases} l_2=0, & l_3\cdot l_1<0 \\ y_0>0, & l_3x_0=l_1z_0 \end{cases}$ 2) $d_{2,2}:\begin{cases} l_2=0, & l_3\cdot l_1>0 \\ y_0>0, & l_3x_0=l_1z_0 \end{cases}$ 3) $d_{2,3}:\begin{cases} l_2=0, & l_3\cdot l_1<0 \\ y_0=0, & l_3x_0=l_1z_0 \end{cases}$

4) $d_{2,4}:\begin{cases} l_2=0, & l_3\cdot l_1>0 \\ y_0=0, & l_3x_0=l_1z_0 \end{cases}$ 5) $d_{2,5}:\begin{cases} l_2=0, & l_3\cdot l_1<0 \\ y_0<0, & l_3x_0=l_1z_0 \end{cases}$ 6) $d_{2,6}:\begin{cases} l_2=0, & l_3\cdot l_1>0 \\ y_0<0, & l_3x_0=l_1z_0 \end{cases}$

$d_{3,i}$ – представники 6 можливих типів прямих підкласу D_3 (що перетинають вісь OZ) – рис. 4 c):

1) $d_{3,1}:\begin{cases} l_3=0, & l_1\cdot l_2<0 \\ z_0>0, & l_1y_0=l_2x_0 \end{cases}$ 2) $d_{3,2}:\begin{cases} l_3=0, & l_1\cdot l_2>0 \\ z_0>0, & l_1y_0=l_2x_0 \end{cases}$ 3) $d_{3,3}:\begin{cases} l_3=0, & l_1\cdot l_2<0 \\ z_0=0, & l_1y_0=l_2x_0 \end{cases}$

4) $d_{3,4}:\begin{cases} l_3=0, & l_1\cdot l_2>0 \\ z_0=0, & l_1 y_0=l_2 x_0 \end{cases}$ 5) $d_{3,5}:\begin{cases} l_3=0, & l_1\cdot l_2<0 \\ z_0<0, & l_1 y_0=l_2 x_0 \end{cases}$ 6) $d_{3,6}:\begin{cases} l_3=0, & l_1\cdot l_2>0 \\ z_0<0, & l_1 y_0=l_2 x_0 \end{cases}$



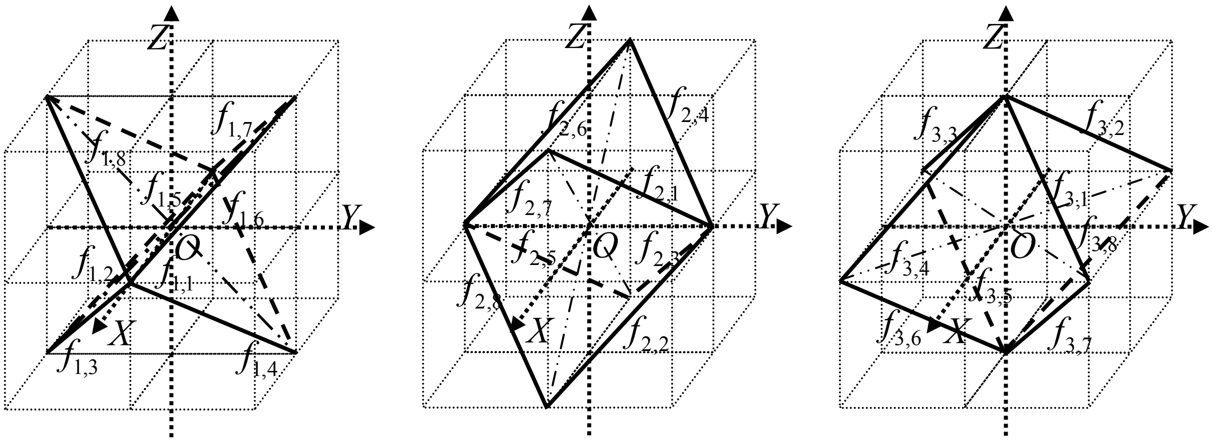
1) $e_1:\begin{cases} \operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:1:1 \\ x_0/l_1 = y_0/l_2 = z_0/l_3 \end{cases}$

2) $e_2:\begin{cases} \operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = -1:1:1 \\ x_0/l_1 = y_0/l_2 = z_0/l_3 \end{cases}$

3) $e_3:\begin{cases} \operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:1:-1 \\ x_0/l_1 = y_0/l_2 = z_0/l_3 \end{cases}$

4) $e_4:\begin{cases} \operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:-1:1 \\ x_0/l_1 = y_0/l_2 = z_0/l_3 \end{cases}$

Рис. 5: **Прямі з класу** E



$a)$ $b)$ $c)$

Рис. 6: **Прямі з класу** F

$f_{1,i}$ – представники 8 можливих типів прямих підкласу F_1 (що перетинають піввісь осі OX) – рис. 6 $a)$:

1) $f_{1,1}:\begin{cases} \operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = -1:1:1 \\ y_0\cdot z_0 \ge 0; l_3 y_0 = l_2 z_0; x_0 > (l_1/l_2)\, y_0 \end{cases}$ 5) $f_{1,5}:\begin{cases} \operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = -1:1:1 \\ y_0\cdot z_0 \ge 0; l_3 y_0 = l_2 z_0; x_0 < (l_1/l_2)\, y_0 \end{cases}$

2) $f_{1,2}:\begin{cases} \operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:1:-1 \\ y_0\cdot z_0 \le 0; l_3 y_0 = l_2 z_0; x_0 > (l_1/l_2)\, y_0 \end{cases}$ 6) $f_{1,6}:\begin{cases} \operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:1:-1 \\ y_0\cdot z_0 \le 0; l_3 y_0 = l_2 z_0; x_0 < (l_1/l_2)\, y_0 \end{cases}$

3) $f_{1,3}:\begin{cases} \operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:1:1 \\ y_0\cdot z_0 \ge 0; l_3 y_0 = l_2 z_0; x_0 > (l_1/l_2)\, y_0 \end{cases}$ 7) $f_{1,7}:\begin{cases} \operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:1:1 \\ y_0\cdot z_0 \ge 0; l_3 y_0 = l_2 z_0; x_0 < (l_1/l_2)\, y_0 \end{cases}$

4) $f_{1,4}:\begin{cases} \operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:-1:1 \\ y_0\cdot z_0 \le 0; l_3 y_0 = l_2 z_0; x_0 > (l_1/l_2)\, y_0 \end{cases}$ 8) $f_{1,8}:\begin{cases} \operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:-1:1 \\ y_0\cdot z_0 \le 0; l_3 y_0 = l_2 z_0; x_0 < (l_1/l_2)\, y_0 \end{cases}$

$f_{2,i}$ – представники 8 можливих типів прямих підкласу F_2 (що перетинають піввісь осі OY) – рис. 6 $b)$:

1) $f_{2,1}:\begin{cases} \operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:-1:1 \\ z_0\cdot x_0 \ge 0; l_1 z_0 = l_3 x_0; y_0 > (l_2/l_3)\, z_0 \end{cases}$ 5) $f_{2,5}:\begin{cases} \operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:-1:1 \\ z_0\cdot x_0 \ge 0; l_1 z_0 = l_3 x_0; y_0 < (l_2/l_3)\, z_0 \end{cases}$

2) $f_{2,2}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=-1:1:1\\ z_0\cdot x_0\le 0; l_1 z_0=l_3 x_0; y_0>\left(l_2/l_3\right)z_0\end{cases}$ 6) $f_{2,6}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=-1:1:1\\ z_0\cdot x_0\le 0; l_1 z_0=l_3 x_0; y_0<\left(l_2/l_3\right)z_0\end{cases}$

3) $f_{2,3}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:1:1\\ z_0\cdot x_0\ge 0; l_1 z_0=l_3 x_0; y_0>\left(l_2/l_3\right)z_0\end{cases}$ 7) $f_{2,7}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:1:1\\ z_0\cdot x_0\ge 0; l_1 z_0=l_3 x_0; y_0<\left(l_2/l_3\right)z_0\end{cases}$

4) $f_{2,4}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:1:-1\\ z_0\cdot x_0\le 0; l_1 z_0=l_3 x_0; y_0>\left(l_2/l_3\right)z_0\end{cases}$ 8) $f_{2,8}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:1:-1\\ z_0\cdot x_0\le 0; l_1 z_0=l_3 x_0; y_0<\left(l_2/l_3\right)z_0\end{cases}$

$f_{3,i}$ – представники 8 можливих типів прямих підкласу F_3 (що перетинають піввісь осі OZ) – рис. 6 c):

1) $f_{3,1}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:1:-1\\ x_0\cdot y_0\ge 0; l_2 x_0=l_1 y_0; z_0>\left(l_3/l_1\right)x_0\end{cases}$ 5) $f_{3,5}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:1:-1\\ x_0\cdot y_0\ge 0; l_2 x_0=l_1 y_0; z_0<\left(l_3/l_1\right)x_0\end{cases}$

2) $f_{3,2}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:-1:1\\ x_0\cdot y_0\le 0; l_2 x_0=l_1 y_0; z_0>\left(l_3/l_1\right)x_0\end{cases}$ 6) $f_{3,6}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:-1:1\\ x_0\cdot y_0\le 0; l_2 x_0=l_1 y_0; z_0<\left(l_3/l_1\right)x_0\end{cases}$

3) $f_{3,3}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:1:1\\ x_0\cdot y_0\ge 0; l_2 x_0=l_1 y_0; z_0>\left(l_3/l_1\right)x_0\end{cases}$ 7) $f_{3,7}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:1:1\\ x_0\cdot y_0\ge 0; l_2 x_0=l_1 y_0; z_0<\left(l_3/l_1\right)x_0\end{cases}$

4) $f_{3,4}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=-1:1:1\\ x_0\cdot y_0\le 0; l_2 x_0=l_1 y_0; z_0>\left(l_3/l_1\right)x_0\end{cases}$ 8) $f_{3,8}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=-1:1:1\\ x_0\cdot y_0\le 0; l_2 x_0=l_1 y_0; z_0<\left(l_3/l_1\right)x_0\end{cases}$

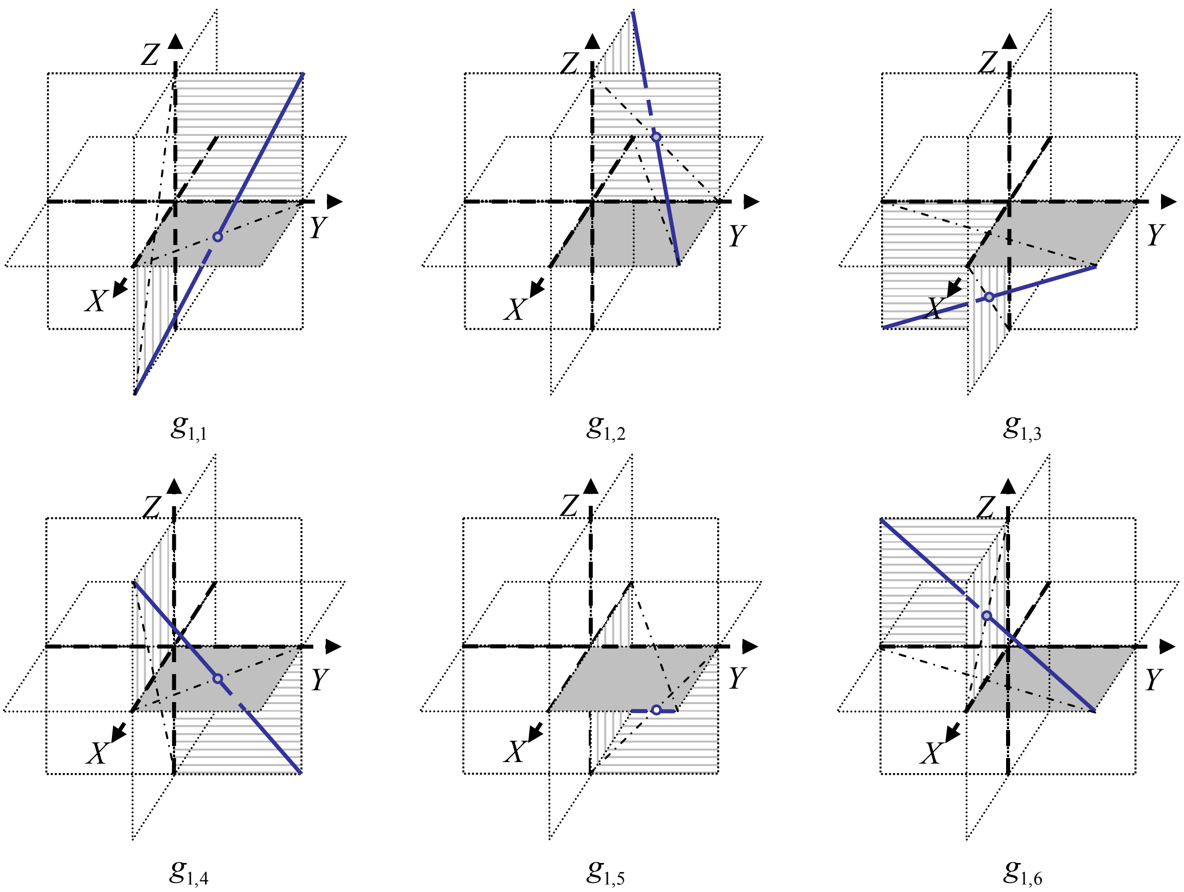


Рис. 8: $g_{1,i}$ **– представники 6 можливих типів прямих підкласу** G_1 **(що перетинають чверть площину** X_+OY_+**)**

1) $g_{1,1}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=-1:1:1\\ x_0>(l_1/l_3)z_0, \quad y_0>(l_2/l_3)z_0\end{cases}$ 2) $g_{1,2}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=-1:-1:1\\ z_0>(l_3/l_1)x_0, \quad y_0>(l_2/l_1)x_0\end{cases}$

3) $g_{1,3}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:1:1\\ x_0>(l_1/l_2)y_0, \quad z_0<(l_3/l_2)y_0\end{cases}$ 4) $g_{1,4}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:-1:1\\ x_0>(l_1/l_3)z_0, \quad y_0>(l_2/l_3)z_0\end{cases}$

5) $g_{1,5}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:1:1\\ y_0>(l_2/l_1)x_0, \quad z_0<(l_3/l_1)x_0\end{cases}$ 6) $g_{1,6}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=-1:-1:1\\ z_0>(l_3/l_2)y_0, \quad x_0>(l_1/l_2)y_0\end{cases}$

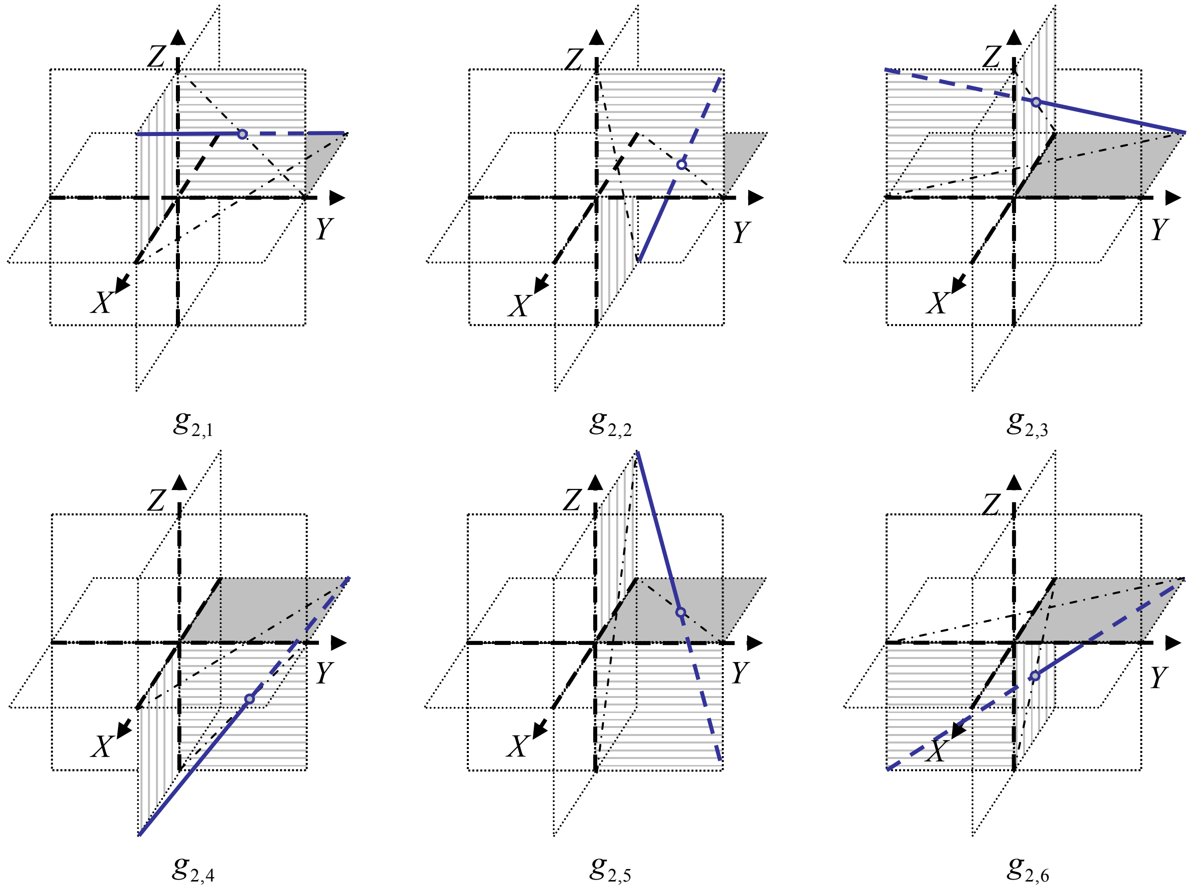
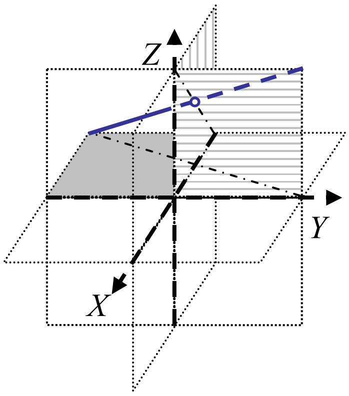


Рис. 9: $g_{2,i}$ **– представники 6 можливих типів прямих підкласу** G_2 **(що перетинають чверть площину** Y_+OX_-**)**

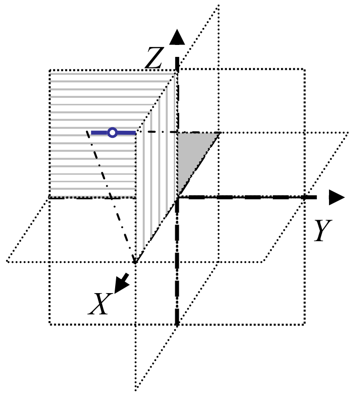
1) $g_{2,1}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:-1:1\\ y_0>(l_2/l_1)x_0, \quad z_0>(l_3/l_1)x_0\end{cases}$ 2) $g_{2,2}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:1:1\\ y_0>(l_2/l_1)x_0, \quad z_0>(l_3/l_1)x_0\end{cases}$

3) $g_{2,3}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:-1:1\\ x_0<(l_1/l_2)y_0, \quad z_0>(l_3/l_2)y_0\end{cases}$ 4) $g_{2,4}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=-1:1:1\\ y_0>(l_2/l_1)x_0, \quad z_0<(l_3/l_1)x_0\end{cases}$

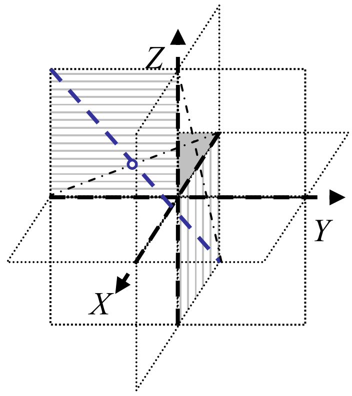
5) $g_{2,5}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=-1:-1:1\\ x_0<(l_1/l_3)z_0, \quad y_0>(l_2/l_3)z_0\end{cases}$ 6) $g_{2,6}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=-1:1:1\\ x_0<(l_1/l_2)y_0, \quad z_0<(l_3/l_2)y_0\end{cases}$



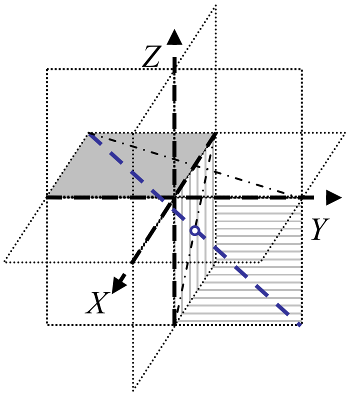
$g_{3,1}$



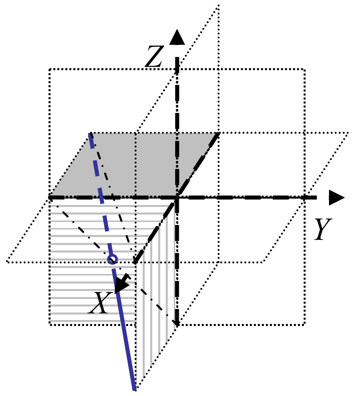
$g_{3,2}$



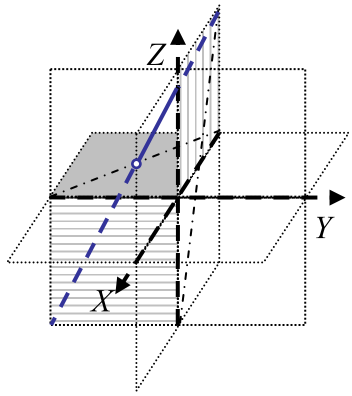
$g_{3,3}$



$g_{3,4}$



$g_{3,5}$



$g_{3,6}$

Рис. 10: $g_{3,i}$ **– представники 6 можливих типів прямих підкласу** G_3 **(що перетинають чверть площину** $X\_OY\_$**)**

1) $g_{3,1}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:1:1 \\ x_0 < (l_1/l_2)\, y_0, \quad z_0 > (l_3/l_2)\, y_0\end{cases}$

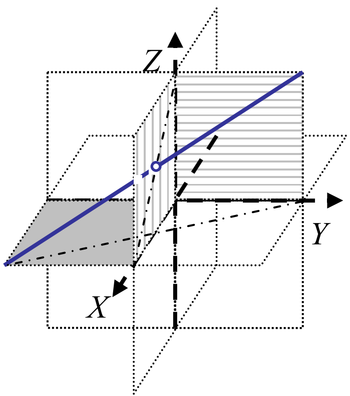
2) $g_{3,2}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:1:1 \\ y_0 < (l_2/l_1)\, x_0, \quad z_0 > (l_3/l_1)\, x_0\end{cases}$

3) $g_{3,3}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:-1:1 \\ x_0 < (l_1/l_3)\, z_0, \quad y_0 < (l_2/l_3)\, z_0\end{cases}$

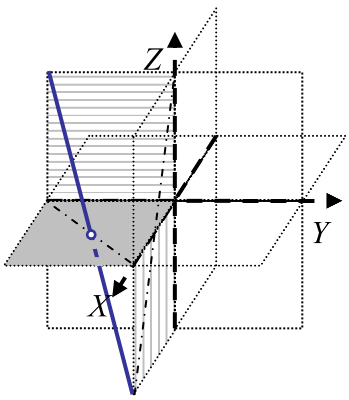
4) $g_{3,4}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:1:-1 \\ x_0 < (l_1/l_2)\, y_0, \quad z_0 < (l_3/l_2)\, y_0\end{cases}$

5) $g_{3,5}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:1:-1 \\ y_0 < (l_2/l_1)\, x_0, \quad z_0 < (l_3/l_1)\, x_0\end{cases}$

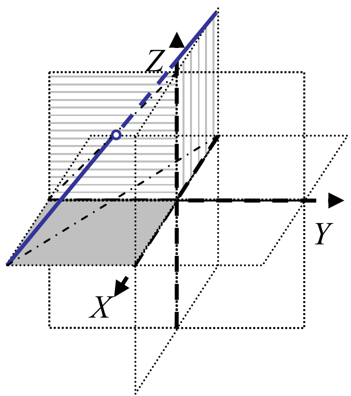
6) $g_{3,6}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = -1:1:1 \\ x_0 < (l_1/l_3)\, z_0, \quad y_0 < (l_2/l_3)\, z_0\end{cases}$



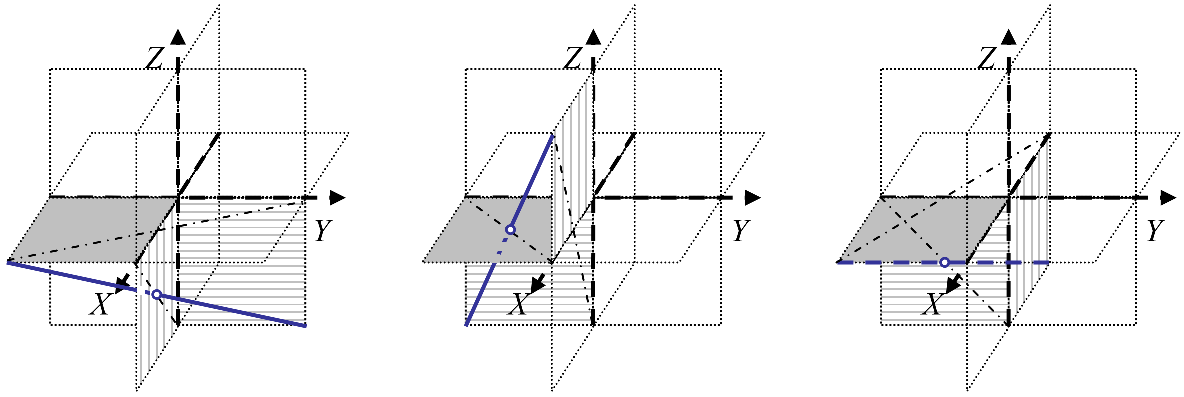
$g_{4,1}$



$g_{4,2}$



$g_{4,3}$



$g_{4,4}$ $g_{4,5}$ $g_{4,6}$

Рис. 11: $g_{4,i}$ **– представники 6 можливих типів прямих підкласу** G_4 **(що перетинають чверть площину** $Y_{-}OX_{+}$ **)**

1) $g_{4,1}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=-1:1:1\\ x_0>(l_1/l_2)\,y_0,\quad z_0>(l_3/l_2)\,y_0\end{cases}$ 2) $g_{4,2}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=-1:-1:1\\ x_0>(l_1/l_3)\,z_0,\quad y_0<(l_2/l_3)\,z_0\end{cases}$

3) $g_{4,3}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=-1:1:1\\ y_0<(l_2/l_1)\,x_0,\quad z_0>(l_3/l_1)\,x_0\end{cases}$ 4) $g_{4,4}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:-1:1\\ x_0>(l_1/l_2)\,y_0,\quad z_0<(l_3/l_2)\,y_0\end{cases}$

5) $g_{4,5}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:1:1\\ x_0>(l_1/l_3)\,z_0,\quad y_0<(l_2/l_3)\,z_0\end{cases}$ 6) $g_{4,6}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:-1:1\\ y_0<(l_2/l_1)\,x_0,\quad z_0<(l_3/l_1)\,x_0\end{cases}$

Висновки. Авторський досвід упровадження запропонованого змістового наповнення дозволяє стверджувати, що залучення студентів до класифікації геометричних об’єктів є саме тим видом навчально-наукової діяльності, який дозволяє: розвивати відповідні практичні навички; сприяє свідомому засвоєнню умов і критеріїв геометричних властивостей-ознак, а не перетворюється у формальну їх перевірку шляхом підстановки вихідних даних у необхідні аналітичні рівності.

Література

1. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры/ П.С. Александров. – М.: Наука, 1968. – 912 с.

2. Атанасян Л.С. Геометрія. Частина 1: Навчальний посібник для студентів фізмат факультетів педінститутів / Атанасян Л.С. – К.: Вища школа, 1976, – 456 с.

3. Збірник задач з аналітичної геометрії / За редакцією В.В. Кириченка. – Камянець-Подільський: Аксіома, 2013, – 225 с.

4. Клочко В.І. Комп'ютерно-орієнтована методика узагальнення і систематизації знань та вмінь в процесі навчання студентів аналітичної геометрії: Монографія / В. І. Клочко, М. Б. Ковальчук – Вінниця : ВНТУ, 2009. – 116 с.

5. Моденов П.С. Аналитическая геометрия / П.С. Моденов. – М.: МГУ, 1969. – 699 с.

6. Моденов П.С. Сборник задач по аналитической геометрии / П.С. Моденов, А.С. Пархоменко. – М.: Наука, 1976. – 384 с.

7. Мусхелишвили Н.И. Курс аналитической геометрии / Н.И. Мусхелишвили. – [4-е изд.]. – М.: Высшая школа, 1967. – 655 с.

8. Погорелов А.В. Аналитическая геометрия / Погорелов А.В. – [3 изд.] – М., Наука, 1968, – 176 с.

9. Сморжевський Ю.Л. Узагальнення і конкретизація як прийоми евристичної діяльності та їх диференційоване формування в учнів на уроках стереометрії // Дидактика математики: проблеми і дослідження: між. зб. наук. робіт. – 2004. – № 22. – С. 121 – 126.

10. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии / О.Н. Цубербиллер – М.: Наука, 1964. – 336 с.

References

1. Aleksandrov P.S. Lectures on analytic geometry, supplemented by the necessary information from the algebra / P.S. Alexandrov. – Moscow: Science, 1968. – 912 p.

2. Atanasyan L.S. Geometry. Part 1: Textbook for Students of Physics Faculties Pedagogical Inst. / L.S. Atanasyan – K.: High School, 1976 – 456 p.

3. Collection tasks analytical geometries / edited by V.V. Kirichenko . – Kamyanets-Podilsky : Axiom , 2005 – 228 p .

4. Klochko V.I. Computer-oriented method of generalization and systematization of knowledge and skills in teaching students analytical geometry: Monograph / V.I. Klochko, M.B. Kovalchuk – Vinnitsa: NTB, 2009. – 116 p.

5. Modenov P.S. Analytic Geometry / P.S. Modenov. – Moscow: Moscow State University, 1969. – 699 p.

6. Modenov P.S. Collection tasks analytic geometry / P.S. Modenov, A.S. Parkhomenko. – M.: Science, 1976. – 384 p.

7. Mushelishvili N.I. Course analytic geometry / N.I. Mushelishvili. – [4-a ed.]. – M.: Higher School, 1967. – 655 p.

8. Pogorelov A.V. Analytic geometry / A.V. Pogorelov – [3rd ed.] – M., Science, 1968 – 176 p.

9. Smorzhevskij Y.L. Generalization and specification techniques like heuristic activity and differentiated development of students in the classroom geometry / / Didactics of mathematics: Problems i study: between collected sciences works – 2004 – № 22 – P. 121 – 126.

10. Tsuberbiller O.N. Tasks and exercises in analytic geometry / O.N. Tsuberbiller – Moscow: Science, 1964. – 336 p.

Резюме. Кадубовский А.А., Алдошина А.В. К ВОПРОСУ О КЛАССИФИКАЦИИ ПРЯМЫХ ПРОСТРАНСТВА В КУРСЕ АНАЛИТЕЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ. *Освещается авторский опыт формирования у будущих учителей математики навыков обобщения и конкретизации на примере изучения темы «Прямая в пространстве» путем содержательного ее наполнения вопросом о классификации прямых пространства по признаку взаимного расположения относительно координатных осей и плоскостей декартовой системы координат.*

Ключевые слова: *обобщение и конкретизация, классификация прямых пространства, координатная ось, координатная плоскость, критерии.*

Summary. Kadubovsky A.A., Aldoshina A.V. ON THE CLASSIFICATION OF THE DIRECT SPACE LINES OF AWARE ANALYTIC GEOMETRY. *Author highlights the experience of forming students - mathematicians pedagogical colleges skills generality and specificity for example, studying the topic "direct location in space" by filling it meaningful question of classification on the basis of lines of mutual arrangement relative to the coordinate axes and planes of the Cartesian coordinate system.*

The aim of the article is to highlight the author's experience developing skills generalization, as appropriate empirical and theoretical levels of thinking on the classification of lines of example on the above grounds.

In this article the authors first determined that there is exactly 133 essentially different types of lines on the specified attribute and shows the corresponding analytical conditions under which the straight line defined canonical equation is representative of one of these types of lines.

Experience of implementing the proposed semantic content suggests that attracting students to the classification of geometric objects is exactly the kind of educational - scientific activity, allows us to develop appropriate skills, promotes conscious appreciation of the conditions and criteria of geometric properties - signs, and does not turn into a formal test them by substituting source data necessary analytical equality.

Key words: *generalization and specification, classification of direct space coordinate axis coordinate plane, criteria.*