

А.О. Федорченко

ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет», Слов'янськ

e-mail: [nastyaf201474@gmail.com](mailto:nastyaf201474@gmail.com)

Науковий керівник – Кадубовський О.А.,

кандидат фізико-математичних наук, доцент

## ПРО ОДИН ТИП ЗАДАЧ НА РОЗФАРБУВАННЯ, ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ ДІРІХЛЕ ТА СУМІЖНІ ПИТАННЯ

Добре відомо, що за допомогою принципу Діріхле зазвичай доводять існування певного об'єкту, не наводячи в явному вигляді алгоритм його знаходження чи побудови. «Это даёт так называемое неконструктивное доказательство – мы не можем сказать, в какой именно клетке сидят два зайца, а знаем только, что такая клетка есть» [1].

Одним з прикладів задач на розфарбування певної кількості клітин прямокутної клітчастої області, при якій в зазначеній області завжди існує фігура, яка містить щонайменше фіксовану кількість зафарбованих клітин є наступна задача: «У прямокутнику  $5 \times 6$  зафарбовано (певні) 19 клітинок. Доведіть, що в ньому можна знайти квадрат  $2 \times 2$ , у якому зафарбовано не менше трьох клітинок».

Найбільш поширена помилка учнів під час розв'язування зазначеного типу задач полягає у представленні конкретного способу (напр., зображених на рис. 1 і 2) розфарбування (з такою «максимальною» кількістю розфарбованих клітинок, при якій є відсутньою фігура, яка містить щонайменше фіксовану кількість зафарбованих клітин) та «відстоюванні» (абсолютно) правильної тези про те, що зафарбування будь-якої з решти нерозфарбованих клітинок призведе до появи зазначеної фігури.

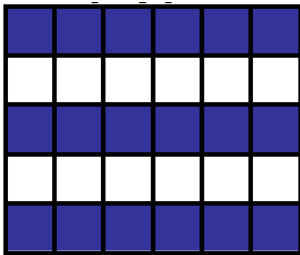


Рис. 1

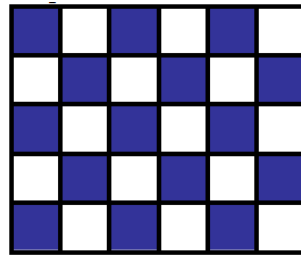


Рис. 2

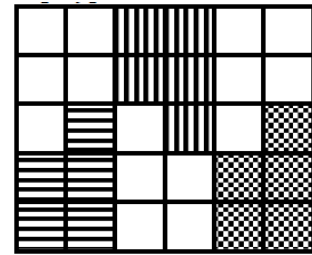


Рис. 3

Помилковість таких міркувань полягає в тому, що саме для зазначеного способу розфарбування клітин – це дійсно так, і зазначена за умовою задачі фігура існує. Проте умовою задачі передбачається будь-який спосіб розфарбування (певних) 19 клітинок.

З класичним підходом до розв'язання наведеної задачі можна ознайомитися в [1, С. 8], де пропонується спосіб розбиття прямокутної області на 6 однакових фігур, зображених на рис. 3, з подальшим застосуванням принципу Діріхле. В [5, С. 40-41] цю задачу запропоновано розв'язати ще й наступним чином:

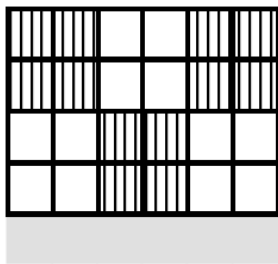


Рис. 4

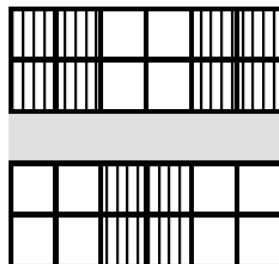


Рис. 5

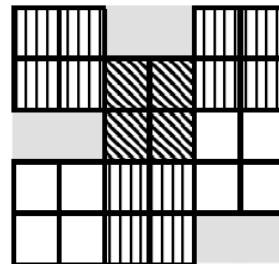


Рис. 6

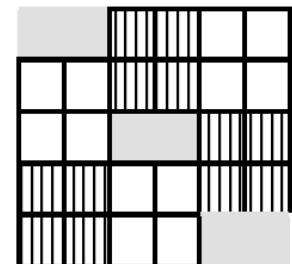


Рис. 7

У прямокутнику  $5 \times 6$  **зафіксуємо** («видалимо») 6 клітин в один зі способів, зображених на рис. 4 – 7, а інші клітини прямокутника розіб'ємо на 6 квадратів  $2 \times 2$  у відповідний спосіб. Тоді при довільному розфарбуванні 19 клітин у прямокутнику  $5 \times 6$  серед клітин 6 квадратів  $2 \times 2$  зафарбованих виявиться щонайменше  $19 - 6 = 13$  клітин. Оскільки  $13 = 6 \times 2 + 1$ , то за принципом Діріхле серед 6 зазначених квадратів  $2 \times 2$  знайдеться принаймні один, в якому буде зафарбовано щонайменше три клітинки.

Задачі зазначеного типу зустрічаються і з наступним формулюванням «У квадраті розміром  $5 \times 5$  зафарбували (певні) 16 клітинок. Доведіть, що в ньому знайдеться фігурка виду



всі клітинки якої будуть розфарбованими».

Як з'ясувалося ([4, С. 183], [2, С. 13], [5, С. 41]), при їх розв'язанні також можна застосувати аналогічний підхід, а саме: у квадраті  $5 \times 5$  **зафіксуємо** («видалимо») 3 клітинки в один зі способів, зображених на рис. 8 – 10, а інші клітинки квадрата розіб'ємо на 6 фігур (4 квадрати  $2 \times 2$  та 2 триклітинкові фігурки наведеного вище виду) у відповідний спосіб та застосуємо принцип Діріхле.

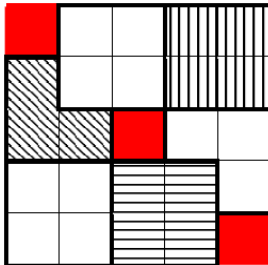


Рис. 8

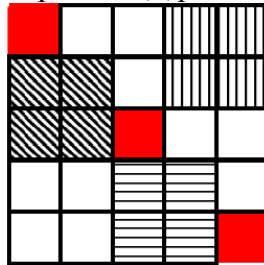


Рис. 9

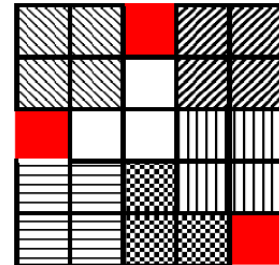


Рис. 10

Маємо своїм приємним обов'язком також відзначити, що останню задачу (за № 9.7 (10)) в [3, С. 77] розв'язано методом від супротивного.

### Література

1. Андреев А.А., Горелов Г.Н., Люлев А.И., Савин А.Н. Принцип Дирихле. Учебное издание. Серия А: Математика. Вып. 1. – Самара: Пифагор, 1997. – 21 с.
2. Вороний О.М. Готуємось до олімпіад з математики. – Х. : Вид. група «Основа», 2009. – 255 с.
3. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язання. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005. – 208 с.
4. Сборник материалов математических олимпиад: 906 самых интересных задач и примеров с решениями / [Р. И. Довбыш, Л. Л. Потемкина, Н. Л. Трегуб и др.] – Донецк: ООО ПКФ «БАО», 2005. – 336 с.
5. Олімпіадні задачі: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики – 2019 : навчальний посібник / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін. Слов'янськ : вид. центр «Маторін», 2020. 88 с.

**Анотація. Федорченко А. О. Про один тип задач на розфарбування, застосування принципу Діріхле та суміжні питання.**

Дане повідомлення присвячене задачам на розфарбування певної кількості клітин прямокутної клітчастої області, при якій в зазначеній області існує фігура, яка містить щонайменше фіксовану кількість зафарбованих клітин. Акцентується увага на найбільш поширеній помилці учнів під час розв'язування зазначеного типу задач та наведено можливі способи їх розв'язання.

**Ключові слова:** задачі на розфарбування клітчастої області, принцип Діріхле.