МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний вищий навчальний заклад
«Донбаський державний педагогічний університет»

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ
II ЕТАПУ
ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ
З МАТЕМАТИКИ — 2013

6 – 11 *класи*

Рекомендовано вченою радою
ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»
як навчальний посібник
для факультативних занять з математики

Слов'янськ — 2014

УДК 51 (075.3)
ББК 22.1 я 721
О-543

Олімпіадні задачі: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики — 2013 : навчальний посібник / Б. Б. Беседін, О. А. Кадубовський, В. С. Сьомкін, Н. І. Труш, О. В. Чуйко. — Слов'янськ : видавничий центр «Маторін», 2014. — 60 с. — (Викладачі ДДПУ — учням, студентам, вчителям, вип. 12).

Адресовано вчителям та викладачам математики, як посібник для проведення гурткових і факультативних занять при підготовці до учнівських математичних олімпіад. Буде корисним учням ЗОШ та студентам математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ.

РЕКОМЕНДОВАНО
вченою радою Державного вищого навчального закладу
«Донбаський державний педагогічний університет»,
протокол № 5 від 30.01.2014 р.

Рецензенти:

доктор педагогічних наук **Є.О. ЛОДАТКО**,
Українська інженерно-педагогічна академія,
професор кафедри охорони праці та інженерної педагогіки

кандидат фізико-математичних наук **В.Є. ВЕЛИЧКО**,
Донбаський державний педагогічний університет,
доцент кафедри алгебри.

Відповідальний за випуск:

кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри геометрії та
методики викладання математики О.А. Кадубовський

Зміст

ВІД АВТОРІВ

> «Якщо ви хочете навчитися плавати, то сміливо заходьте у воду, а якщо хочете навчитися розв'язувати задачі, то розв'язуйте їх!.»
>
> Д. Пойа[1]

Даний посібник є дванадцятим випуском серії «ВИКЛАДАЧІ ДДПУ – УЧНЯМ, СТУДЕНТАМ, ВЧИТЕЛЯМ» заснованої у 2008 році. Посібник містить розв'язання задач II етапу (районного) Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, який проводився 23 листопада 2013 року відповідно до наказу Міністерства освіти і науки України від 05.08.2013 року № 1079 «Про проведення Всеукраїнських учнівських олімпіад і турнірів у 2013/2014 навчальному році» та наказу Управління освіти і науки Донецької обласної державної адміністрації № 619 від 15.10.2013 «Про проведення II етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад у 2013-2014 навчальному році».

Як і в попередніх випусках для більшості задач олімпіади пропонується кілька способів розв'язання, обсяг викладок яких інколи суттєво відрізняється. Такий підхід ні в якому разі не передбачає оцінки доцільності або порівняння того чи іншого із запропонованих методів. Навпаки, оскільки кожна олімпіадна задача є, в певному розумінні, унікальною і вимагає особливого ставлення, то головна мета авторів посібника — «донести» до вчителів і учнів якомога більше корисних математичних ідей і принципів та показати їх застосування.

[1] Пойа Д. Математическое открытие. М., 1970. 452 с.

Нагадаємо, що принципами в математиці називають деякі прості, майже очевидні, твердження, аксіоми або методи, які використовуються в доведеннях математичних теорем. Дуже часто учні зустрічаються з ними при розв'язуванні олімпіадних задач з математики. Перш за все учні, які беруть участь в олімпіадах, повинні володіти значною кількістю принципів. Нажаль шкільна програма не передбачає знайомства з більшістю із них. З основними математичними принципами можна ознайомитись у наведеній літературі, зокрема в [13][2].

У посібнику до окремих задач наводяться «доповнення», сенс яких полягає:

у формулюванні двоїстої або схожої задачі,

або ж в узагальненні запропонованої задачі.

На думку авторів такі доповнення повинні активізувати і зацікавити учнів при підготовці до майбутніх олімпіад.

Колектив авторів посібника та керівництво фізико-математичного факультету державного вищого навчального закладу «Донбаський державний педагогічний університет» висловлює щиру подяку всім вчителям міста Слов'янськ, які беруть участь в організації та проведенні як учнівських олімпіад з математики, так і семінарів, присвячених аналізу їх результатів.

Маємо надію, що представлений посібник буде корисним керівникам математичних гуртків та їх зацікавленим учням, стане для багатьох з них поштовхом до більш змістовних міркувань і буде спонукати до систематичного ознайомлення з тим чи іншим розділом математики.

Вчіться творчому пошуку в процесі розв'язування задач!

Із найщирішими побажаннями, викладачі кафедри геометрії та методики викладання математики фізико-математичного факультету Державного вищого навчального закладу «Донбаський державний педагогічний університет».

14.01.2014

[2] Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. – К.: А.С.К., 2005. – 344с.

ЧАСТИНА І. УМОВИ ЗАДАЧ

6 клас

1. (15 балів) У зерносховищі було 120 т зерна. За перший день вивезли 35% всього зерна, за другий – 25% всього зерна. Скільки тон зерна залишилось в зерносховищі?
2. (15 балів) Знайдіть площу города прямокутної форми, якщо людина обходить його за 5 хвилин зі швидкістю 20 м/хв. Відомо, що ширина города 20 м.
3. (20 балів) Я задумав число, якщо до його половини додати його чверть, то отримаємо 18. Яке число я задумав?
4. (20 балів) Доведіть, що число, записане трьома однаковими цифрами ділиться на 37.
5. (30 балів) Навколо кола розташували 2013 натуральних чисел. Доведіть, що знайдуться два сусідніх числа, сума яких парна.

7 клас

1. (15 балів) Розв'яжіть рівняння $|x| = \frac{x}{2} + 2013$.
2. (15 балів) Перший множник збільшили на 50%, а другий множник зменшили на 16%. Як змінився добуток?
3. (20 балів) На папері в клітинку накреслили квадрат зі стороною 5 клітинок. Розбийте його на 5 частин однакової площі, проводячи відрізки лише по лініях сітки. Чи може статися так, що сума довжин проведених відрізків не перевищує 16 клітинок?

4. (20 балів) Сума чотирьох чисел дорівнює 100. Якщо перше число збільшити на 4, друге збільшити в 4 рази, третє число зменшити на 4, а четверте зменшити в 4 рази, то отримаємо рівні результати. Знайдіть ці числа.
5. (30 балів) На столі лежать 18 олівців. Двоє учнів по черзі беруть один, два або три олівці. Програє той, хто візьме останній олівець. Як повинен грати перший учень, щоб виграти?

8 клас

1. (15 балів) Порівняйте числа $\frac{1}{50\cdot 51}+\frac{1}{51\cdot 52}+\frac{1}{52\cdot 53}+...+\frac{1}{99\cdot 100}$ та $\frac{1}{100}$.
2. (15 балів) Побудуйте графік функції
$$y=\frac{x^2-4x}{4-x}-\frac{x^2-4}{x-2}.$$
3. (20 балів) З довільної точки M катета AC прямокутного трикутника ABC опущено перпендикуляр MK на гіпотенузу AB. Доведіть, що $\angle MKC=\angle MBC$.
4. (20 балів) Доведіть, що з будь-яких дев'яти натуральних чисел можна вибрати два, різниця яких ділиться на 8.
5. (30 балів) Сума трьох цілих чисел ділиться на 6. Доведіть, що сума кубів цих чисел ділиться на 6.

9 клас

1. (15 балів) Довести, що $\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\geqslant 8$, якщо $x>0, y>0, z>0$.
2. (15 балів) Розв'язати рівняння $x^2+y^2+10x-12y+61=0$.
3. (20 балів) Знайдіть площу рівнобічної трапеції з основами 8см та 10см, якщо її діагоналі перпендикулярні.
4. (20 балів) Доведіть, що якщо $a-2b=1$, то рівність $a^3-8b^3=1+6ab$ є вірною.
5. (30 балів) В готель приїхав мандрівник. Грошей у нього не було. Він мав срібний ланцюжок з 7 кілець. За кожен день перебування в готелі

він розплачувався одним кільцем ланцюжка. Господар попередив, що згоден взяти не більше одного розпиляного кільця, а інші повинні бути цілими. Як мандрівникові розпиляти ланцюжок, щоб прожити у готелі тиждень і кожен день розплачуватися з господарем?

10 клас

1. (15 балів) Розв'яжіть нерівність $\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x^2+x-6}} \leqslant 0$.
2. (15 балів) При яких значеннях параметра a корені рівняння
$$x^2-(2a+1)\,x+a^2-4a+3=0$$
є додатними числами?
3. (20 балів) На продовженні найбільшої сторони AC трикутника ABC відкладено відрізок CD, причому $CD = BC$. Доведіть, що $\angle ABD$ тупий.
4. (20 балів) Побудуйте графік функції $y = \dfrac{|x-4|}{4-x}\left(x^2-4x\right)$.
5. (30 балів) a і b - дійсні числа, різниця яких ділиться на 11. Доведіть, що число $\left(a^2+b^2\right)^2+7a^2b^2$ також ділиться на 11.

11 клас

1. (15 балів) Визначте, яке число більше $\sqrt[13]{\dfrac{1997}{1998}}$ чи $\sqrt[13]{\dfrac{1998}{1999}}$.
2. (15 балів) Функція f така, що для будь-яких додатних x та y виконується рівність $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$. Знайдіть $f\,(2013)$, якщо $f\left(\frac{1}{2013}\right)=1$.
3. (20 балів) Знайдіть площу паралелограма зі сторонами a та b, якщо гострий кут між діагоналями дорівнює φ.
4. (20 балів) Розв'яжіть рівняння $1+\cos{(x-1)}=\frac{x^2+1}{x}$, де $x>0$.
5. (30 балів) Знайдіть максимальне значення виразу a^2+b^2, якщо відомо, що $a^2+b^2+ab=a+b$.

ЧАСТИНА II.
ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ

6 клас

1. `Відповідь:` 48 т.
2. `Відповідь:` 600 кв. м.
3. `Відповідь:` 24.
4. – задача на доведення.
5. – задача на доведення.

7 клас

1. `Відповідь:` $4026\,,\ -1342\,.$
2. `Відповідь:` збільшиться на 26%.
3. `Відповідь:` так (задача на побудову).
4. `Відповідь:` $a=12\,,\ b=4\,,\ c=20\,,\ d=64\,.$
5. – задача на доведення.

8 клас

1. `Відповідь:` числа є рівними.
2. – задача на побудову.
3. – задача на доведення.

4. – задача на доведення.

5. – задача на доведення.

9 клас

1. – задача на доведення.

2. `Відповідь`: $x = -5\,,\ y = 6\,.$

3. `Відповідь`: 81 кв. см.

4. – задача на доведення.

5. – задача на доведення.

10 клас

1. `Відповідь`: $x \in [-4;-3) \bigcup (2;3]\,.$

2. `Відповідь`: $a \in \left[\frac{11}{20};1\right) \bigcup (3;+\infty)\,.$

3. – задача на доведення.

4. – задача на побудову.

5. – задача на доведення.

11 клас

1. `Відповідь`: $\sqrt[13]{\dfrac{1997}{1998}} < \sqrt[13]{\dfrac{1998}{1999}}\,.$

2. `Відповідь`: $-1\,.$

3. `Відповідь`: $\frac{1}{2}\left|b^2 - a^2\right| \operatorname{tg}\varphi\,.$

4. `Відповідь`: $x = 1\,.$

5. `Відповідь`: $1\,.$

ЧАСТИНА III. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

6 клас

Задача 1.

За умовою задачі за перший день із зерносховища вивезли 35% всього зерна, а за другий – 25% всього зерна. Тому за два дні вивезли $35+25=60\,\%$ всього зерна. Тоді у зерносховищі залишилося $100-60=40\,\%$ всього зерна.

Оскільки в зерносховищі спочатку було 120 т зерна, то після вивозу залишилося зерна $(120:100)\cdot 40=(120\cdot 40):100=4800:100=48$ т.

Відповідь: 48 т.

Задача 2.

За умовою людина обходить город за 5 хвилин зі швидкістю 20 м/хв. Тому, обійшовши город, людина подолає відстань, яка становить $5\cdot 20=100$ м.

Оскільки город має форму прямокутника, то з останнього випливає, що периметр прямокутника (границі города) становить 100 м.

За умовою ширина города 20 м. Оскільки півпериметр города становить 50 м, а протилежні сторони прямокутника є рівними ширині і довжині відповідно, то довжина города становить $50-20=30$ м.

Площа города дорівнює площі прямокутника, який обмежує город. Тому площа города становить $20\cdot 30=600$ кв. м.

Відповідь: 600 кв. м.

Задача 3.

Нехай x – четверта частина задуманого числа. Тоді задумане число становить $4 \cdot x$, а його половина – $2 \cdot x$. За умовою, якщо до половини задуманого числа додати його чверть, то отримаємо число 18. Тому має місце рівняння $2x + x = 18$. Звідки $3x = 18$, $x = 18 : 3$, $x = 6$.

Розв'язавши рівняння ми одержали, що $x = 6$. Тому, згідно введених позначень, задумане число становить $4x$ і дорівнює $4 \cdot 6 = 24$. Таким чином, задуманим числом було число 24.

Відповідь: 24.

?! Якщо цеглина важить 1 кілограм плюс вага половини цеглини, то скільки важить цеглина?

Задача 4.

I спосіб

$$\begin{aligned} 111 = 37 \cdot 3; \quad 222 &= 2 \cdot 111 = 2 \cdot 37 \cdot 3 = 37 \cdot 6; \\ 333 &= 3 \cdot 111 = 3 \cdot 37 \cdot 3 = 37 \cdot 9; \\ 444 &= 4 \cdot 111 = 4 \cdot 37 \cdot 3 = 37 \cdot 12; \\ 555 &= 5 \cdot 111 = 5 \cdot 37 \cdot 3 = 37 \cdot 15; \\ 666 &= 6 \cdot 111 = 6 \cdot 37 \cdot 3 = 37 \cdot 18; \\ 777 &= 7 \cdot 111 = 7 \cdot 37 \cdot 3 = 37 \cdot 21; \\ 888 &= 8 \cdot 111 = 8 \cdot 37 \cdot 3 = 37 \cdot 24; \\ 999 &= 9 \cdot 111 = 9 \cdot 37 \cdot 3 = 37 \cdot 27. \end{aligned}$$

Кожне з чисел, записаних трьома однаковими цифрами, ділиться на 37, оскільки кожне з них можна подати у вигляді добутку двох натуральних чисел, одне з яких дорівнює 37.

II спосіб

Нехай a – одна з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Тоді будь-яке число B, записане трьома однаковими цифрами a, можна подати у вигляді

$$B = \overline{aaa} = 100 \cdot a + 10 \cdot a + a = 111 \cdot a = 37 \cdot 3 \cdot a.$$

Оскільки число B можна подати у вигляді добутку трьох натуральних чисел, одне з яких дорівнює 37, то будь-яке число, записане трьома однаковими цифрами a $(a \neq 0)$, ділиться на 37.

?! Доведіть, що кожне з чисел, записаних чотирма однаковими цифрами, ділиться на 101.

Задача 5.

За умовою задачі по колу вписали 2013 натуральних числа. Доведемо, що знайдуться два сусідніх числа, сума яких є парною.

Найбільша кількість чисел (з 2013 заданих довільних натуральних чисел), яку можна розташувати по колу, так щоб жодна пара сусідніх чисел в сумі не давала парного числа, дорівнює 2012. Це випадок, коли маємо 1006 парних і 1006 непарних чисел, які чергуються на колі (парне, непарне, парне,...). 2013-те натуральне число буде або парним, або непарним. При будь-якому його розташуванні на колі воно обов'язково потрапить між парним і непарним числом.

Тобто, на колі обов'язково з'явиться пара сусідніх чисел, які мають однакову парність і тому в сумі дадуть парне число.

А чи звертали Ви увагу?

$9 \times 1 = 9,\quad 0 + 9 = 9;\quad 9 \times 11 = 99,\quad 9 + 9 = 18,\ 1+8=9;$
$9 \times 2 = 18,\quad 1 + 8 = 9;\quad \dots$
$9 \times 3 = 27,\quad 2 + 7 = 9;$
$9 \times 4 = 36,\quad 3 + 6 = 9;$
$9 \times 5 = 45,\quad 4 + 5 = 9;$
$9 \times 6 = 54,\quad 5 + 4 = 9;$
$9 \times 7 = 63,\quad 6 + 3 = 9;$
$9 \times 8 = 72,\quad 7 + 2 = 9;$
$9 \times 9 = 81,\quad 8 + 1 = 9;$
$9 \times 10 = 90,\quad 9 + 0 = 9.$

---

7 клас

Задача 1.

Розв'яжемо рівняння

$$|x| = \frac{x}{2} + 2013. \tag{7.1.1}$$

За визначенням

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \tag{7.1.2}$$

З урахуванням $(7.1.2)$, рівняння $(7.1.1)$:

1) У випадку, коли $x \geqslant 0$, набуває вид

$$x = \frac{x}{2} + 2013,$$

звідки $\frac{x}{2} = 2013$, $x = 4026$. Оскільки $4026 \geqslant 0$, то $x_1 = 4026$ – корінь рівняння $(7.1.1)$.

2) У випадку, коли $x < 0$, набуває вид

$$-x = \frac{x}{2} + 2013,$$

звідки $-\frac{3x}{2} = 2013$, $-3x = 4026$, $x = -1342$. Оскільки $-1342 < 0$, то $x_2 = -1342$ – корінь рівняння $(7.1.1)$.

Таким чином, коренями даного рівняння $(7.1.1)$ є значення змінної $x_1 = 4026$, $x_2 = -1342$.

Відповідь: 4026, -1342.

?! Відомо, що $a > b > 0, c > 0$. Доведіть, що коренями рівняння

$$a\,|x| = bx + c$$

є значення змінної

$$x_1 = \frac{c}{a-b}, \quad x_2 = -\frac{c}{a+b}.$$

Задача 2.

Нехай a – перший множник, а b – другий множник. Тоді добуток d цих множників становить $d = a \cdot b$.

1) Після збільшення першого множника a на 50%, одержали число

$$a' = a + \frac{a}{100} \cdot 50 = \frac{150}{100}a = \frac{3}{2}a;$$

2) після зменшення другого множника b на 16% одержали число

$$b' = b - \frac{b}{100} \cdot 16 = \frac{84}{100}b = \frac{21}{25}b;$$

3) добуток d' чисел a' і b' становить $d' = \frac{3}{2}a \cdot \frac{21}{25}b = \frac{63}{50}ab$.

Таким чином $d' = \frac{63}{50} \cdot d$, звідки $\frac{d'}{d} = \frac{63}{50} = \frac{126}{100}$.

Оскільки $\frac{63}{50} > 1$, то $\frac{d'}{d} > 1$. І тому $d' > d$.

Отже, якщо перший множник збільшити на 50%, а другий множник зменшити на 16%, то добуток збільшиться на 26%.

Відповідь: добуток збільшиться на 26%.

?! Якщо заробітну плату робітника спочатку збільшили на 25%, а потім зменшили на 20%, то чи зміниться і як заробітна плата?

А чи звертали Ви увагу?

1) Для збільшення величини a на p% достатньо a помножити на «відповідний коефіцієнт» – число

$$\frac{100 + p}{100}.$$

2) Для зменшення величини b на q% достатньо b помножити на «відповідний коефіцієнт» – число

$$\frac{100 - q}{100}.$$

Задача 3.

Шукані розбиття квадрата зі стороною 5 клітинок на 5 частин однакової площі (шляхом проведення відрізків вздовж ліній сітки) показано на рис. 1 нижче із зазначенням відповідної суми довжин проведених відрізків.

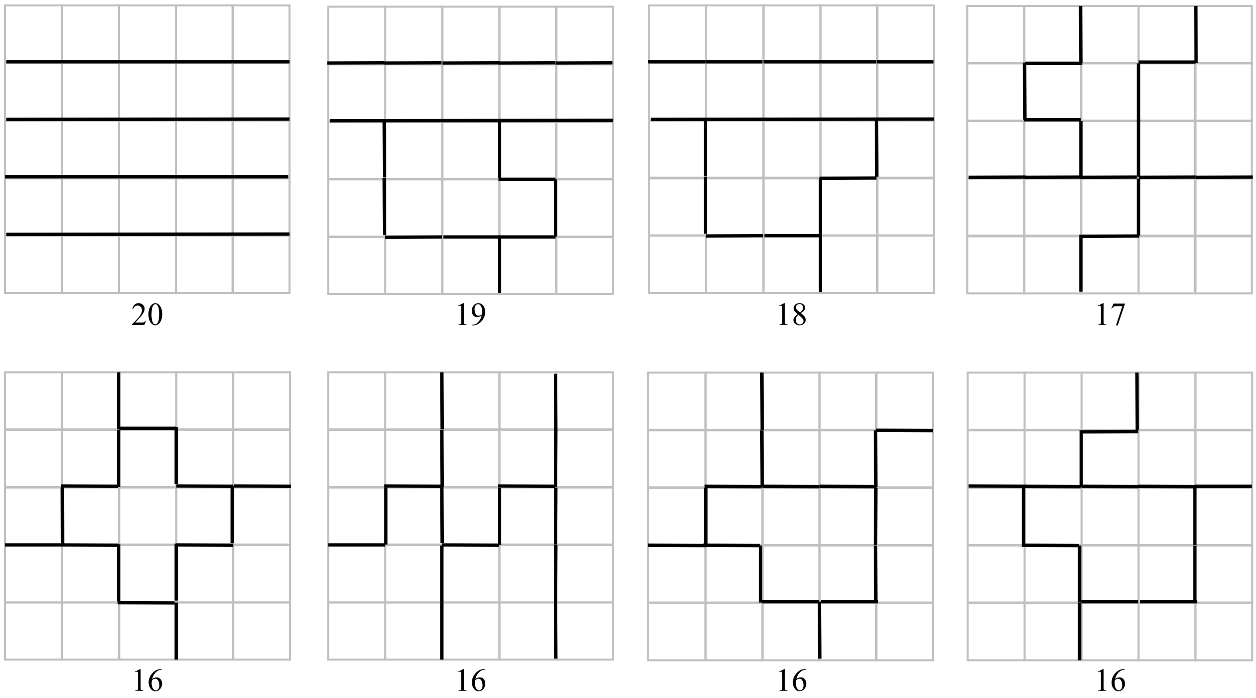


Рис. 1: Приклади розбиття квадрата зі стороною 5 клітинок на 5 частин однакової площі

Відповідь: Так, сума довжин проведених відрізків може не перевищувати 16 клітинок (відрізків).

ДОПОВНЕННЯ до задачі 3.

Зауважимо, що «частини» однакової площі (рівної сумі площ 5 квадратів-клітинок), які одержуються в результаті розрізання квадрата 5×5 (шляхом проведення відрізків вздовж ліній сітки), є плоскими геометричними фігурами, які утворені шляхом сполучення п'яти одноклітинних квадратів вздовж їх сторін.

Не важко перевірити, що всі такі фігури вичерпуються 12-ма фігурами F_i («пентаміно»), зображеними на рис. 2 нижче.

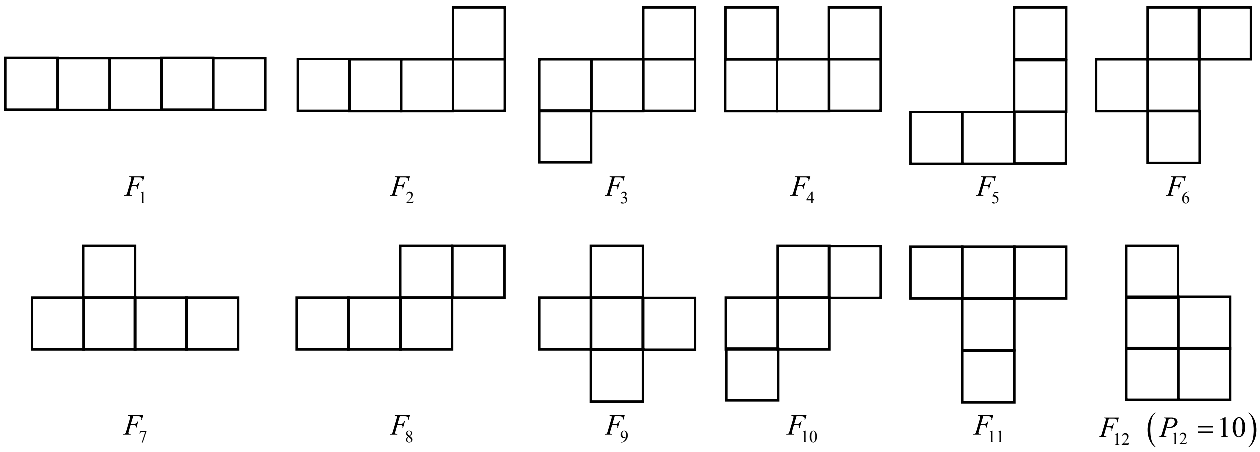


Рис. 2: 12 різних (з точністю до рівності фігур) фігур-пентаміно

Оберемо в якості одиниці довжини – довжину сторони квадрата-клітинки. Тоді очевидно, що: периметр Q квадрата 5×5 становить 20 лін.од.; периметр P_i кожної з фігур F_i, за винятком останньої («12-ої»), дорівнює 12 лін.од., а периметр фігури F_{12} – 10 лін.од.

Очевидно, що сума P периметрів будь-яких п'яти із 12-ти зазначених фігур може приймати одне з наступних значень: 50, 52, 54, 56, 58, 60. Тобто,

$$50 \leqslant P \leqslant 60. \tag{7.3.1}$$

Позначимо через K – суму довжин проведених відрізків *розбиття* квадрата 5×5 на 5 фігур-пентаміно (*що задовольняє умову задачі*).

Кожен відрізок (одиничної довжини), вздовж якого відбувається проведення розбиття, належить точно двом фігурам. І тому його довжина входить до периметрів точно двох фігур. Отже, суму P периметрів п'яти фігур будь-якого розбиття квадрата 5×5 на 5 фігур-пентаміно можна обчислити за правилом $P = 2K + Q$. Звідки $P - 20 = 2K$ або ж

$$\frac{P-20}{2} = K. \tag{7.3.2}$$

З урахуванням $(7.3.1)$, має місце оцінка $30 \leqslant P - 20 \leqslant 40$. Звідки $15 \leqslant \frac{P-20}{2} \leqslant 20$. З урахуванням останньої нерівності та оцінки $(7.3.2)$, ми одержали **необхідну умову**, яку повинна задовольняти величина K для будь-якого розбиття квадрата 5×5 на 5 фігур-пентаміно. А саме

$$15 \leqslant K \leqslant 20. \tag{7.3.3}$$

З останнього випливає, що при будь-якому натуральному $K < 15$ або ж $K > 20$ шуканого розбиття квадрата 5×5 на 5 фігур-пентаміно **не існує**.

На рисунку 1 наведено приклади *реалізації* розбиття квадрата 5×5 на 5 фігур-пентаміно для кожного з випадків коли $K = 20; 19; 18; 17; 16$.

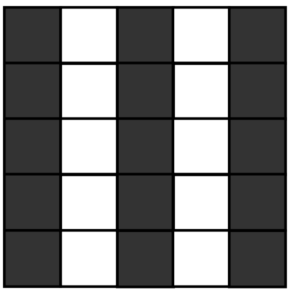
З'ясуємо тепер питання про існування розбиття квадрата 5×5 на 5 фігур-пентаміно у випадку $K = 15$.

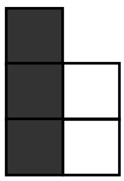
З урахуванням (7.3.2), $K = 15 \Leftrightarrow P = 50$. $P = 50$ лише у випадку, коли кожна з фігур-пентаміно є (з точністю до рівності фігур) фігурою F_{12}.

Доведемо, що розбиття квадрата 5×5 на **п'ять** фігур-пентаміно F_{12} не існує. Для цього розфарбуємо квадрат 5×5 у два кольори (чорний і білий) так, як показано на рисунку нижче. Тоді будь-яка фігура F_{12} (яка цілком міститься всередині квадрата 5×5) буде мати

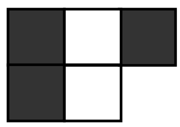
1) 3 чорних і 2 білих клітинки або ж 2) 2 чорних і 3 білих клітинки.

Нехай x – число фігур F_{12} 1-го типу, тоді $5 - x$ – число фігур F_{12} 2-го типу. Тому загальне число клітинок чорного кольору становить $3 \cdot x + 2 \cdot (5 - x) = x + 10$. З іншого боку, $H = 15$. Звідки $x = 5$. Таким чином, кожна з п'яти фігур розбиття повинна бути фігурою F_{12} 1-го типу. Всі фігури F_{12} 1-го типу вичерпуються з точністю до рівності фігур та розфарбування фігурами виду A і B, зображеними на рисунку.





A



B

Очевидно, що: для «покриття» 5-ти білих клітинок 2-го стовпця квадрата 5×5 знадобиться щонайменше 3 фігури 1-го типу; для «покриття» 5-ти білих клітинок 4-го стовпця – також щонайменше 3 фігури 1-го типу; серед фігур виду A і B немає таких, які б одночасно «покрили» білі клітинки у 2-му і 4-му стовпцях. З останнього й випливає, що для «покриття» білих клітинок знадобиться щонайменше **шість** фігур F_{12}.

Задача 4.

Позначимо перше, друге, третє і четверте шукані числа як a, b, c і d відповідно.

I спосіб

За умовою, якщо перше число збільшити на 4, друге збільшити в 4 рази, третє число зменшити на 4, а четверте зменшити в 4 рази, то отримаємо рівні результати. Тому мають місце рівності

$$a+4=b\cdot 4=c-4=\frac{d}{4}=t, \tag{7.4.1}$$

де t – спільне значення. Звідки

$$a=t-4, b=\frac{t}{4}, c=t+4, d=4t. \tag{7.4.2}$$

За умовою сума чотирьох чисел a, b, c і d дорівнює 100, тому має місце рівняння

$$t-4+\frac{t}{4}+t+4+4t=100, \tag{7.4.3}$$

звідки $6t+\frac{t}{4}=100$, $24t+t=400$, $25t=16\cdot 25$, $t=16$.

З урахуванням $(7.4.2)$, маємо

$$a=16-4=12, b=\frac{16}{4}=4, c=16+4=20, d=4\cdot 16=64. \tag{7.4.4}$$

II спосіб

За умовою має виконуватись рівність

$$a+4=b\cdot 4=c-4=\frac{d}{4}. \tag{7.4.5}$$

Звідки

$$a=4b-4, b=b, c=4b+4, d=16b. \tag{7.4.6}$$

Оскільки $a+b+c+d=100$, то

$$4b-4+b+4b+4+16b=100, \tag{7.4.7}$$

звідки $25b=100 \Rightarrow b=4$.

І тому $a=4\cdot 4-4=12, c=4\cdot 4+4=20, d=16\cdot 4=64$.

Відповідь: $a=12$, $b=4$, $c=20$, $d=64$.

Задача 5.

Для того щоб, згідно з правилами гри, перший учень виграв, на останньому – k-му своєму кроці він повинен залишити 1 олівець (для другого). Для того, щоб йому це вдалося, на передостанньому $(k-1)$-му кроці він повинен залишити для другого 5 олівців:

якщо другий учень на $(k-1)$-му кроці візьме 1 олівець, то перший на останньому k-му кроці повинен взяти 3 олівця;

якщо другий учень на $(k-1)$-му кроці візьме 2 олівця, то перший на останньому k-му кроці повинен взяти 2 олівця;

якщо другий учень на $(k-1)$-му кроці візьме 3 олівця, то перший на останньому k-му кроці повинен взяти 1 олівець.

Так само, для того, щоб після $(k-1)$-го кроку першому вдалося залишити для другого 5 олівців, після $(k-2)$-го кроку перший повинен залишити для другого 9 олівців:

якщо другий учень на $(k-2)$-му кроці візьме 1 олівець, то перший на передостанньому $(k-1)$-му кроці повинен взяти 3 олівця;

якщо другий учень на $(k-2)$-му кроці візьме 2 олівця, то перший на передостанньому $(k-1)$-му кроці повинен взяти 2 олівця;

якщо другий учень на $(k-2)$-му кроці візьме 3 олівця, то перший на передостанньому $(k-1)$-му кроці повинен взяти 1 олівець.

Продовжуючи вказані міркування, приходимо до висновку, що перший учень для гарантованого виграшу в даній грі повинен залишати після себе «в зворотному напрямку» 1; 5; 9; 13; 17 олівців.

Отже, перший учень, щоб виграти, повинен грати наступним чином:

Відповідь: першого разу він повинен взяти 1 олівець (бо 1 – це остача від ділення числа 17=18-1 на число 4). При кожному наступному виборі керуватися **правилом**:

«якщо другий візьме 1 олівець, то перший повинен взяти 3 олівці,
якщо другий візьме 2 олівці, то перший повинен взяти 2 олівці,
якщо другий візьме 3 олівці, то перший повинен взяти 1 олівець».

ДОПОВНЕННЯ до задачі 5.

Як повинен грати перший учень, щоб виграти, якщо олівців не 18 а, наприклад, 23 (17)?

Якою повинна бути стратегія першого гравця (щоб виграти), якщо при заданій кількості олівців (18) кожному з гравців дозволяється на кожному кроці брати не більше 4-ьох (5-ти) олівців?

Якою повинна бути стратегія першого гравця (щоб виграти), якщо при заданій кількості олівців $n \neq 4k+1$ кожному з гравців дозволяється на кожному кроці брати не більше m ($m < n$) олівців?

?! Якою буде відповідь для n-значного числа, $n > 6$.

8 клас

Задача 1.

I спосіб

$$\frac{1}{50\cdot 51}+\frac{1}{51\cdot 52}+\frac{1}{52\cdot 53}+...+\frac{1}{99\cdot 100}=$$

$$=\left(\frac{1}{50}-\frac{1}{51}\right)+\left(\frac{1}{51}-\frac{1}{52}\right)+\left(\frac{1}{52}-\frac{1}{53}\right)+...+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=$$

$$=\frac{1}{50}-\frac{1}{51}+\frac{1}{51}-\frac{1}{52}+\frac{1}{52}-\frac{1}{53}+...+\frac{1}{98}-\frac{1}{99}+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=$$

$$=\frac{1}{50}-\frac{1}{100}=\frac{2}{100}-\frac{1}{100}=\frac{1}{100}.$$

Таким чином $\frac{1}{50\cdot 51}+\frac{1}{51\cdot 52}+\frac{1}{52\cdot 53}+...+\frac{1}{99\cdot 100}=\frac{1}{100}$.

II спосіб

$$\frac{1}{50\cdot 51}+\frac{1}{51\cdot 52}=\frac{52+50}{50\cdot 51\cdot 52}=\frac{102}{50\cdot 51\cdot 52}=\frac{2\cdot 51}{50\cdot 51\cdot 52}=\frac{2}{50\cdot(50+2)};$$

$$\frac{2}{50\cdot 52}+\frac{1}{52\cdot 53}=\frac{2\cdot 53+50}{50\cdot 52\cdot 53}=\frac{156}{50\cdot 52\cdot 53}=\frac{3\cdot 52}{50\cdot 52\cdot 53}=\frac{3}{50\cdot(50+3)};$$

$$\frac{3}{50\cdot 53}+\frac{1}{53\cdot 54}=\frac{3\cdot 54+50}{50\cdot 53\cdot 54}=\frac{212}{50\cdot 53\cdot 54}=\frac{4\cdot 53}{50\cdot 53\cdot 54}=\frac{4}{50\cdot(50+4)};$$

...

$$\frac{k}{50\cdot(50+k)}+\frac{1}{(50+k)\cdot(50+k+1)}=\frac{k\cdot(50+k+1)+50}{50\cdot(50+k)\cdot(50+k+1)}=$$

$$=\frac{(k+1)(50+k)}{50\cdot(50+k)\cdot(50+k+1)}=\frac{k+1}{50\cdot(50+k+1)};$$

...

$$\frac{49}{50\cdot 99}+\frac{1}{99\cdot 100}=\frac{49\cdot 100+50}{50\cdot 99\cdot 100}=\frac{50\cdot 99}{50\cdot 99\cdot 100}=\frac{1}{100}.$$

Таким чином $\frac{1}{50\cdot 51}+\frac{1}{51\cdot 52}+\frac{1}{52\cdot 53}+...+\frac{1}{99\cdot 100}=\frac{1}{100}$.

Відповідь: запропоновані за умовою задачі числа є рівними.

?! Порівняйте числа $1-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}-...-\frac{1}{99\cdot 100}$ та $\frac{1}{100}$.

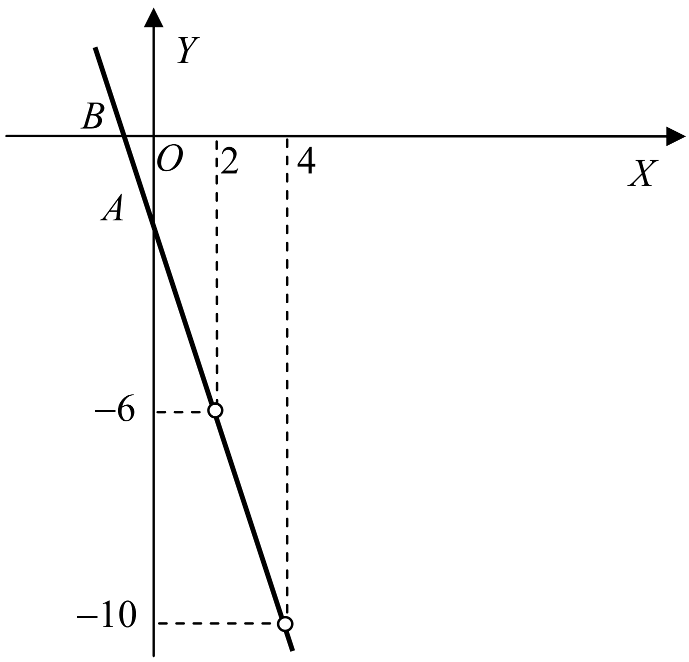
Задача 2.

Очевидно, що функція $y = \dfrac{x^2-4x}{4-x} - \dfrac{x^2-4}{x-2}$ існує при будь-яких дійсних x, за винятком $x = 4$ та $x = 2$. Крім того, вираз, що задає функцію, припускає спрощення

$$\frac{x^2-4x}{4-x} - \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{x(x-4)}{4-x} - \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} =$$
$$= -\frac{x(x-4)}{x-4} - \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = -x-(x+2) = -2x-2, \quad x \neq 4, x \neq 2\,.$$

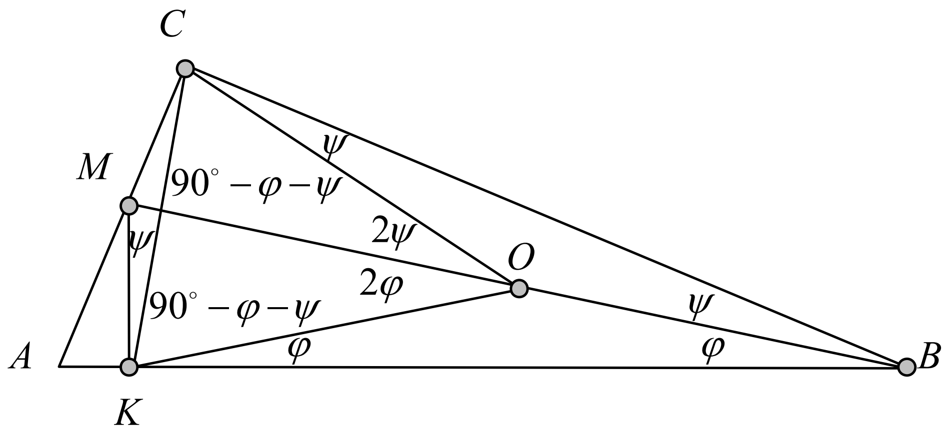
Таким чином, графіком даної функції є пряма $y = -2x-2$ з «виколотими» на ній двома точками, що мають абсциси $x = 2$ та $x = 4$ відповідно.

Для побудови зазначеної прямої достатньо побудувати дві її точки, наприклад, точки $A(0;-2)$ і $B(-1;0)$. Графік функції подано на рисунку нижче.



Задача 3.

I спосіб



1) Розглянемо трикутники MKB та MCB. Трикутник MCB є прямокутним, бо за умовою $\angle C = 90^0$. За умовою MK є перпендикуляром на AB. Звідки $\angle MKB = 90^0$.

Таким чином, трикутники MKB і MCB є прямокутними зі спільною гіпотенузою MB. Нехай далі O – середина MB.

2) Оскільки довжина медіани прямокутного трикутника, яка проведена з вершини прямого кута, дорівнює половині довжини гіпотенузи, то мають місце рівності

$$BO = OK = OM = OC.$$

Позначимо далі $\angle MBC = \psi$, а $\angle KBM = \varphi$. Тоді мають місце рівності:
$\angle BCO = \angle CBO = \psi$ (як кути при основі рівнобедреного $\triangle\ BCO$);
$\angle BKO = \angle KBO = \varphi$ (як кути при основі рівнобедреного $\triangle\ BKO$);
$\angle COM = 2\psi$ (як зовнішній кут при вершині рівнобедреного $\triangle\ BCO$);
$\angle KOM = 2\varphi$ (як зовнішній кут при вершині рівнобедреного $\triangle\ BKO$).

3) Оскільки $\triangle\ CKO$ є рівнобедреним з основою KC, то

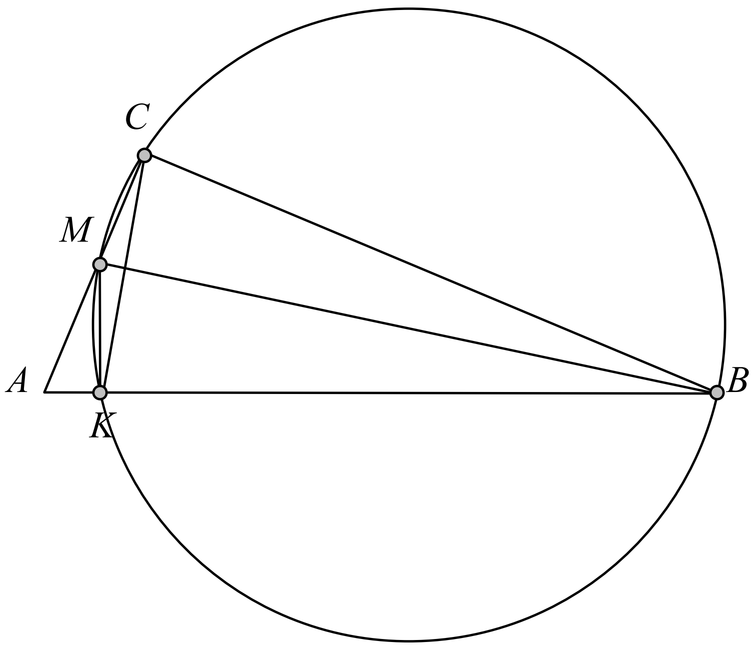
$$\angle KCO = \angle CKO = \frac{180^0 - 2\varphi - 2\psi}{2} = 90^0 - \varphi - \psi.$$

4) Як наслідок з аксіоми вимірювання кутів, маємо наступну рівність

$$\angle MKC = \angle MKB - \angle CKO - \angle OKB =$$
$$= 90^0 - \left(90^0 - \varphi - \psi\right) - \varphi = \psi.$$

Отже, $\angle MKC = \angle MBC$.

II спосіб



Розглянемо чотирикутник $KMCB$. В ньому: $\angle MCB = 90^0$ за умовою, $\angle BKM = 90^0$ оскільки $MK \perp AB$. Звідки $\angle MCB + \angle BKM = 180^0$.

Таким чином в чотирикутнику $KMCB$ суми протилежних кутів становлять 180^0. І тому навколо чотирикутника $KMCB$ можна описати коло. Кути MKC і MBC спираються на спільну дугу цього кола, і тому є рівними. □

ДОПОВНЕННЯ до задачі 3. Доведіть, що різниця квадратів відрізків, на які розбиває гіпотенузу основа перпендикуляра, опущеного з середини одного з катетів, дорівнює квадрату іншого катета.

А чи звертали Ви увагу?

Якщо в прямокутному трикутнику катет AC втричі більший за катет BC, а точки E і F ділять катет AC на три рівні частини, то

$$\angle BAC + \angle BEC + \angle BFC = 90^0.$$

Задача 4.

Будь-яке натуральне число при діленні на число 8 дає одну з восьми можливих остач: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 або 7.

З будь-яких дев'яти натуральних чисел принаймні 2 числа мають однакову остачу від ділення на 8. І тому їх різниця є числом, яке при діленні на 8 дає остачу 0.

Отже, з будь-яких дев'яти натуральних чисел можна завжди вибрати два, різниця яких ділиться на 8.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 4. Міркування, що були використані при розв'язуванні задачі, базуються на наступному твердженні

`Теорема (про ділення з остачею).` Для будь-яких натуральних a і b існує єдина пара чисел q і r таких, що

$$a = b \cdot q + r, \qquad (8.4.1)$$

де q – натуральне або нуль, r – натуральне або нуль, причому $0 \leqslant r < b$.

Говорять: a *при ділені на* b *дає остачу* r.

ПРИКЛАДИ до теореми «про ділення з остачею»

a (ділене)	b (дільник)	співвідношення	q (ціла частина або неповна частка)	r (остача)
10	4	$10 = 4 \cdot 2 + 2$	2	2
9	4	$9 = 4 \cdot 2 + 1$	2	1
8	4	$8 = 4 \cdot 2 + 0$	2	0
7	4	$7 = 4 \cdot 1 + 3$	1	3
6	4	$6 = 4 \cdot 1 + 2$	1	2
5	4	$5 = 4 \cdot 1 + 1$	1	1
4	4	$4 = 4 \cdot 1 + 0$	1	0
3	4	$3 = 4 \cdot 0 + 3$	0	3
2	4	$2 = 4 \cdot 0 + 2$	0	2
1	4	$1 = 4 \cdot 0 + 1$	0	1

Задача 5.

I спосіб

Нехай x, y, z – вказані цілі числа. Тоді $(x + y + z) = 6 \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Оскільки

$$(x + y + z)^3 = (x + (y + z))^3 = x^3 + 3x^2 (y + z) + 3x (y + z)^2 + (y + z)^3 =$$

$$= x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2 (y + z) + 3x (y + z)^2 + 3yz (y + z) =$$

$$= \left(x^3 + y^3 + z^3\right) + 3 (y + z) \left(x^2 + x (y + z) + yz\right) =$$

$$= \left(x^3 + y^3 + z^3\right) + 3 (y + z) (x (x + y + z) + yz) =$$

$$= \left(x^3 + y^3 + z^3\right) + 3x(y + z) (x + y + z) + 3 (y + z) yz,$$

то $\left(x^3 + y^3 + z^3\right) = 6 \cdot \left(36k^3\right) - 3x(y + z) (x + y + z) - 3 (y + z) yz =$

$$= 6 \cdot \left(36k^3\right) - 6 (3kx(y + z)) - 3 (y + z) yz$$

Для довільних двох цілих чисел y і z або їх сума $(y + z)$ ділиться на два, або ж їх добуток yz ділиться на два.
Тоді при довільних цілих x, y, z, k вираз $3 (y + z) yz$ завжди ділиться на шість. Тому і вираз $6 \cdot \left(36k^3\right) - 6 (3kx(y + z)) - 3 (y + z) yz$ ділиться на шість. Отже, сума кубів вказаних чисел ділиться на 6.

II спосіб

Подамо вираз $x^3 + y^3 + z^3$ у наступному вигляді

$$x^3 + y^3 + z^3 = x^3 + y^3 + z^3 - (x + y + z) + (x + y + z) =$$

$$= \left(x^3 - x\right) + \left(y^3 - y\right) + \left(z^3 - z\right) + (x + y + z) =$$

$$= x \left(x^2 - 1\right) + y \left(y^2 - 1\right) + z \left(z^2 - 1\right) + (x + y + z) =$$

$$= (x - 1) x (x + 1) + (y - 1) y (y + 1) + (z - 1) z (z + 1) + (x + y + z).$$

Звідки

$$x^3 + y^3 + z^3 =$$

$$= (x - 1) x (x + 1) + (y - 1) y (y + 1) + (z - 1) z (z + 1) + (x + y + z) \quad (8.5.1)$$

Зауважимо, що з трьох послідовних цілих чисел одне завжди ділиться на три, і принаймні одне ділиться на два. Тому добуток трьох послідовних цілих чисел завжди ділиться на шість.

Отже, кожен з перших трьох доданків правої частини рівності (8.5.1) ділиться на шість. За умовою останній доданок – вираз $(x+y+z)$ – також ділиться на шість. І тому права частина рівності (8.5.1), а разом з нею і ліва її частина (вираз $\left(x^3+y^3+z^3\right)$) ділиться на шість.

Більше того, з рівності (8.5.1) випливає, що сума кубів $x^3+y^3+z^3$ трьох цілих чисел ділиться на шість тоді і лише тоді, коли на шість ділиться сума цих чисел.

9 клас

Задача 1.

Доведемо, що для будь-яких $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right) \geqslant 8. \tag{9.1.1}$$

I спосіб

1) Подамо ліву частину доводжуваної нерівності (9.1.1) у наступному вигляді

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right) = \left(1+\frac{y}{z}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right) =$$

$$= 1+\frac{y}{\underline{z}}+\frac{x}{\underline{\underline{y}}}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{\underline{\underline{x}}}+\frac{z}{\underline{y}}+1 = 2+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right). \tag{9.1.2}$$

2) Доведемо, що для довільних $a > 0,\ b > 0$ виконується нерівність

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2. \tag{9.1.3}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2 \Leftrightarrow a^2+b^2 \geqslant 2ab \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geqslant 0\,.$$

3) З урахуванням (9.1.3), для довільних $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ мають місце нерівності

$$\begin{array}{rcl} \frac{x}{y}+\frac{y}{x} & \geqslant & 2 \\ \frac{x}{z}+\frac{z}{x} & \geqslant & 2 \\ \frac{y}{z}+\frac{z}{y} & \geqslant & 2. \end{array} \tag{9.1.4}$$

З урахуванням (9.1.2) та (9.1.4) маємо, що

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right) =$$

$$= 2+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right) \geqslant 2+2+2+2 = 8.$$

□

II спосіб

Оскільки $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$, то помноживши обидві частини нерівності $(9.1.1)$ на добуток xyz, одержимо рівносильну нерівність

$$(y + x)(z + y)(x + z) \geqslant 8xyz. \tag{9.1.5}$$

Доведемо, що для будь-яких $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ справджується нерівність $(9.1.5)$.

За нерівністю Коші для довільних додатних a і b справджується нерівність

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}. \tag{9.1.6}$$

Тому для будь-яких $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ мають місце нерівності

$$\begin{aligned} x + y &\geqslant 2\sqrt{xy} \\ x + z &\geqslant 2\sqrt{xz} \\ y + z &\geqslant 2\sqrt{yz}. \end{aligned} \tag{9.1.7}$$

З урахуванням $(9.1.7)$ маємо, що

$$(y + x)(z + y)(x + z) \geqslant 2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{yz} \cdot 2\sqrt{xz} = 8\sqrt{x^2y^2z^2} = 8xyz.$$

$\square$

III спосіб

Застосовуючи нерівність Коші, можна записати:

$$\frac{1 + \frac{x}{y}}{2} \geqslant \sqrt{1 \cdot \frac{x}{y}}; \quad \frac{1 + \frac{y}{z}}{2} \geqslant \sqrt{1 \cdot \frac{y}{z}}; \quad \frac{1 + \frac{z}{x}}{2} \geqslant \sqrt{1 \cdot \frac{z}{x}}.$$

Звідки

$$1 + \frac{x}{y} \geqslant 2\sqrt{1 \cdot \frac{x}{y}}; \quad 1 + \frac{y}{z} \geqslant 2\sqrt{1 \cdot \frac{y}{z}}; \quad 1 + \frac{z}{x} \geqslant 2\sqrt{1 \cdot \frac{z}{x}}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} &\left(1 + \tfrac{x}{y}\right)\left(1 + \tfrac{y}{z}\right)\left(1 + \tfrac{z}{x}\right) \geqslant \\ &\geqslant 8 \cdot \sqrt{1 + \tfrac{x}{y}} \cdot \sqrt{1 + \tfrac{y}{z}} \cdot \sqrt{1 + \tfrac{z}{x}} = 8 \cdot \sqrt{\tfrac{xyz}{yzx}} = 8. \end{aligned}$$

$\square$

Задача 2.

Розв'яжемо рівняння

$$x^2 + y^2 + 10x - 12y + 61 = 0. \tag{9.2.1}$$

I спосіб

Застосуємо метод групування:

$$(x^2 + 10x + 25) - 25 + (y^2 - 12y + 36) - 36 + 61 = 0;$$
$$(x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2) + (y^2 - 2 \cdot 6 \cdot y + 6^2) = 0; \quad (x+5)^2 + (y-6)^2 = 0.$$

Остання рівність можлива лише за умов[3], коли
$\begin{cases} (x+5)^2 = 0 \\ (y-6)^2 = 0. \end{cases}$ Звідки $\begin{cases} x = -5 \\ y = 6. \end{cases}$

II спосіб

Розв'яжемо рівняння (9.2.1) як квадратне рівняння відносно змінної x

$$x^2 + 10x + y^2 - 12y + 61 = 0. \tag{9.2.2}$$

Отже, дискримінант D квадратного рівняння (9.2.2) дорівнює

$$D = 100 - 4(y^2 - 12y + 61) = -4y^2 + 48y - 244 + 100 =$$
$$= -4(y^2 - 12y + 36) = -4(y-6)^2.$$

Оскільки при будь-якому y дискримінант $D = -4(y-6)^2 \leqslant 0$, то квадратне рівняння (9.2.2) має дійсні корені лише у випадку, коли $D = 0$, або, що теж саме – лише у випадку, коли $y = 6$. Тому єдиним дійсним коренем рівняння (9.2.2) є $x = \frac{-10}{2} = -5$. Оскільки при $y \neq 6$ рівняння (9.2.2) не має дійсних коренів, то єдиним розв'язком рівняння (9.2.1) з двома змінними x, y є пара $(-5; 6)$.

Відповідь: $x = -5$, $y = 6$.

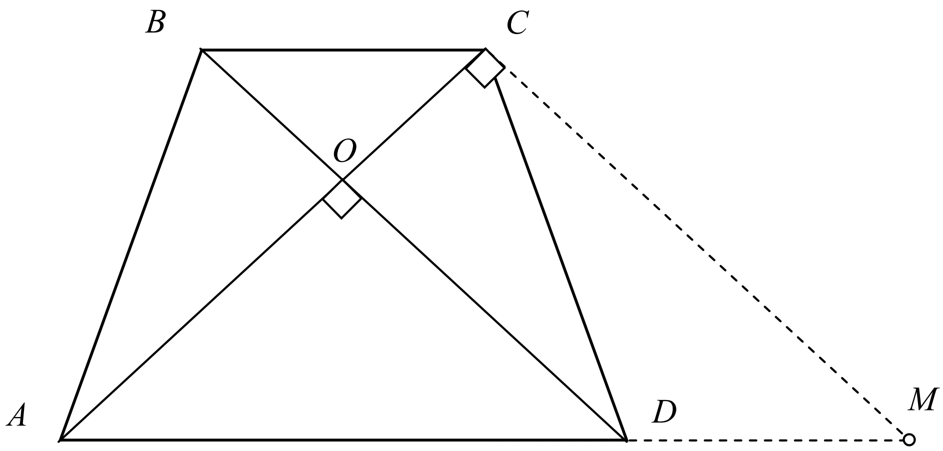
?! При яких a, b, c рівняння $x^2 + ax + y^2 + bx + c = 0$ має єдиний розв'язок $(x_0; y_0)$?

[3] **сума двох невід'ємних доданків дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли кожен з доданків дорівнює нулю**

Задача 3.

Знайдемо площу рівнобічної трапеції $ABCD$ з основами $BC = 8$ см та $AD = 10$ см, якщо її діагоналі є перпендикулярними.

I спосіб



1) З точки C паралельно діагоналі BD проведемо відрізок CM (точка M належить прямій AD). За властивістю паралельних BD, CM і січної AC пряма CM є перпендикулярною до прямої AC. Звідки $\angle ACM = 90^0$.

З іншого боку, оскільки $BC \parallel DM, BD \parallel CM$, то чотирикутник $BCMD$ є паралелограмом. І тому $CM = BD = AC$, $BC = DM$.

2) Розглянемо $\triangle\ ACM$. В ньому: $\angle C = 90^0$, $AC = CM$, а сторона $AM = AD + DM = AD + BC = 10 + 8 = 18$ см.

За теоремою Піфагора знайдемо AC

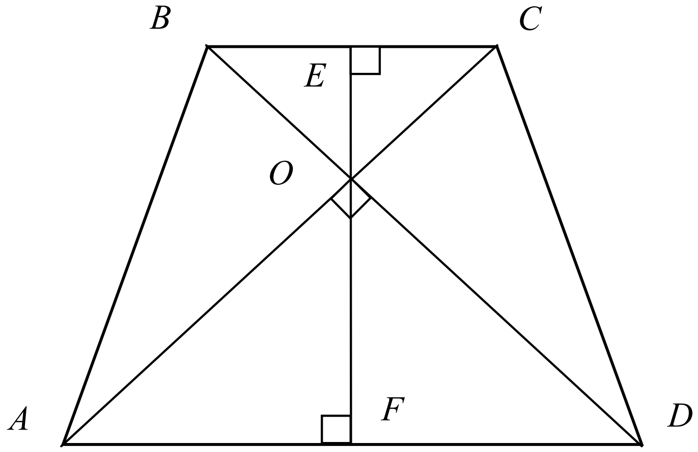
$$2AC^2 = AM^2 \Rightarrow AC = \frac{AM\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

3) Розглянемо трикутники $\triangle\ ABC$ і $\triangle\ CDM$. Оскільки $AB = CD$, $BC = DM$, $AC = CM$, то $\triangle\ ABC = \triangle\ CDM$ за трьома сторонами. Значить площа трапеції $ABCD$ дорівнює площі трикутника ACM. Тобто

$$S_{ABCD} = S_{ACM} = \frac{1}{2}AC \cdot CM = \frac{1}{2}AC^2 = \frac{1}{2} \cdot 81 \cdot 2 = 81 \text{ (кв. см.)}$$

Таким чином, площа трапеції $ABCD$ становить 81 кв. см.

II спосіб



1) Нехай O – точка перетину діагоналей AC і BD даної трапеції. Оскільки трапеція $ABCD$ є рівнобокою, то кожен з трикутників BOC і AOD є рівнобедреним. [*Нагадаємо ідею доведення зазначеного факту*:
у рівнобокої трапеції кути при основах та діагоналі є рівними. Тому за трьома сторонами $\triangle ABC = \triangle DCB$. Звідки $\angle ACB = \angle DBC$. І тому за ознакою рівнобедреного трикутника $BO = OC$. Але ж тоді $AO = DO$ як різниці рівних за довжинами відрізків.]

За умовою діагоналі трапеції є перпендикулярними, і тому кожен з трикутників BOC і AOD є рівнобедреним та прямокутним.

2) Через точку O проведемо висоту трапеції EF (точка E належить BC, F належить AD).

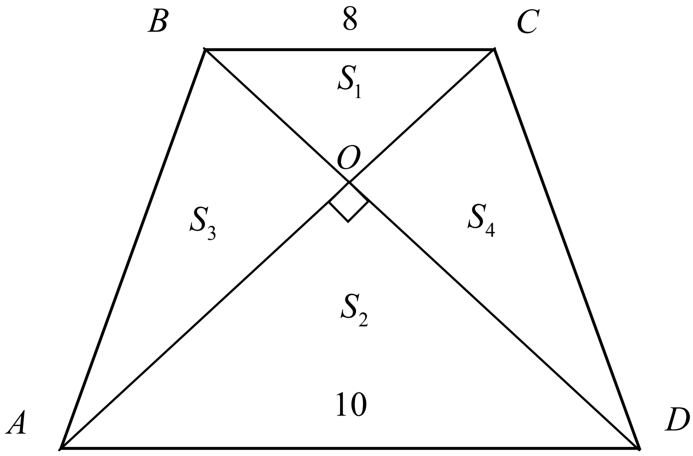
Оскільки кожен з трикутників BOC і AOD є рівнобедреним (з основами BC і AD відповідно), то висоти OE і OF цих трикутників є медіанами. Звідки $BE = EC = 4$ (см.), $AF = FD = 5$ (см.).

З іншого боку, оскільки кожен з трикутників BEO і AFO є прямокутним з гострим кутом 45^0, то кожен з них є також і рівнобедреним. Звідки $OE = BE = 4$ см., $OF = AF = 5$ см..
Отже, висота трапеції EF становить $EF = EO + OF = 4 + 5 = 9$ см.

3) За відомою формулою обчислення площі трапеції остаточно маємо

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot EF = \frac{1}{2}(10 + 8) \cdot 9 = 81 \text{ (кв.см.)}$$

III спосіб



1) Нехай O – точка перетину діагоналей AC і BD даної трапеції. Позначимо через S_1, S_2, S_3 і S_4 площі трикутників BOC, AOD, BOA і COD відповідно.

Оскільки трикутники ABC і DCB є рівновеликими (мають рівні площі), то трикутники AOB і DOC також є рівновеликими. Звідки

$$S_4 = S_3. \tag{9.3.1}$$

2) Прямокутні трикутники AOB і COB мають спільний катет, тому

$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{AO}{OC}. \tag{9.3.2}$$

3) Трикутники AOD і COB є подібними (за гострим кутом). Тому $\frac{AO}{OC} = \frac{AD}{BC} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$. Крім того,

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{AD}{CB}\right)^2 = \frac{25}{16}. \tag{9.3.3}$$

З урахуванням (9.3.1)–(9.3.3) одержуємо, що

$$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_1 + \frac{25}{16}S_1 + \frac{5}{4}S_1 + \frac{5}{4}S_1 = \frac{81}{16}S_1. \tag{9.3.4}$$

4) З рівності трикутників ABC і DCB (за двома сторонами та кутом між ними) маємо, що прямокутний трикутник BOC є рівнобедреним. Звідки $S_1 = \frac{1}{4}BC^2 = \frac{64}{4} = 16$ (кв.см.). І тому, з урахуванням (9.3.4), маємо

$$S_{ABCD} = \frac{81}{16} \cdot 16 = 81 \text{ (кв.см.)}$$

Відповідь: $S_{ABCD} = 81$ кв. см.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 3.

Доведіть, що площу S рівнобічної трапеції з основами a і b, у якої діагоналі є перпендикулярними, можна обчислити за формулою

$$S = \frac{(a+b)^2}{2}.$$

А чи звертали Ви увагу?

Якщо довжина бічної сторони трапеції дорівнює c, а довжина перпендикуляра, опущеного на цю сторону із середини іншої бічної сторони, дорівнює h, то площу S такої трапеції можна знайти за формулою

$$S = c \cdot h.$$

Задача 4.

Доведемо, що за умови $a - 2b = 1$, справджується рівність

$$a^3 - 8b^3 = 1 + 6ab. \tag{9.4.1}$$

1) $a^3 - 8b^3 = a^3 - (2b)^3 = (a-2b)\left(a^2 + 2ab + 4b^2\right)$;

2) оскільки $a - 2b = 1$, то

$$\begin{aligned}
&a^3 - 8b^3 = 1 \cdot \left(a^2 + 2ab + 4b^2\right) = \\
&= \left((1+2b)^2 + 2(1+2b)b + 4b^2\right) = 4b^2 + 4b + 1 + 2b + 4b^2 + 4b^2 = \\
&= 12b^2 + 6b + 1 = 6b(2b+1) + 1 = 6b \cdot a + 1 = 1 + 6ab.
\end{aligned}$$

Задача 5.

Умова задачі. В готель приїхав мандрівник. Грошей у нього не було. Він мав срібний ланцюжок із семи кілець. За кожен день перебування в готелі він розплачувався одним кільцем ланцюжка. Господар попередив, що згоден взяти не більше одного розпиляного кільця, а інші повинні бути цілими. Як мандрівникові розпиляти ланцюжок, щоб прожити у готелі тиждень і кожен день розплачуватися з господарем?

Розв'язання. Мандрівнику необхідно розпиляти `саме третє кільце` ланцюжка. Тоді для щоденної сплати проживання у готелі протягом тижня (з дотриманням вимоги господаря «... згоден взяти не більше одного розпиляного кільця!») мандрівник повинен розплачуватися наступним чином:

у *перший день* — розпиляним кільцем,

у *другий день* — ланцюжком із двох кілець, а в решту одержить від господаря розпиляне кільце,

у *третій день* — розпиляним кільцем,

у *четвертий день* — ланцюжком із чотирьох кілець, а в решту одержить від господаря ланцюжок із двох кілець та розпиляне кільце,

за *п'ятий день* — розпиляним кільцем,

за *шостий день* — ланцюжком із двох кілець, а в решту одержить від господаря розпиляне кільце,

за *сьомий день* — розпиляним кільцем.

10 клас

Задача 1.

Розв'яжемо нерівність

$$\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x^2+x-6}} \leqslant 0.$$

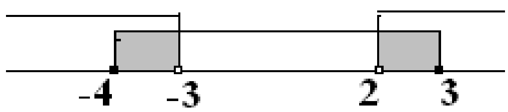
Задана нерівність є рівносильною системі двох нерівностей

$$\begin{cases} x^2+x-12 \leqslant 0, \\ x^2+x-6 > 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему:

$$\begin{cases} x^2+x-12 \leqslant 0, \\ x^2+x-6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)(x-3) \leqslant 0, \\ (x+3)(x-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant 3, \\ \left[\begin{array}{l} x < -3 \\ x > 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant 3 \\ x < -3 \end{cases} \\ \begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant 3 \\ x > 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 \leqslant x < -3 \\ 2 < x \leqslant 3 \end{array}\right.$$



Отже, розв'язками даної нерівності є $x \in [-4;-3) \bigcup (2;3]$.

Відповідь: $x \in [-4;-3) \bigcup (2;3]$.

Задача 2.

З'ясуємо при яких значеннях параметра a корені рівняння

$$x^2 - (2a+1)\,x + a^2 - 4a + 3 = 0 \tag{10.2.1}$$

є додатними числами.

I спосіб – *«за теоремою Вієта»*

За теоремою Вієта рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має обидва додатні корені, якщо виконуються умови

$$\begin{cases} \frac{c}{a} > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ b^2 - 4ac \geqslant 0 \end{cases} \tag{10.2.2}$$

З урахуванням (10.2.2) рівняння (10.2.1) має обидва додатні корені, коли виконуються умови

$$\begin{cases} a^2 - 4a + 3 > 0 \\ 2a+1 > 0 \\ (2a+1)^2 - 4(a^2 - 4a + 3) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(a-3) > 0 \\ a > -\frac{1}{2} \\ 20a - 11 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < 1 \\ a > 3 \end{array} \right. \\ a > -\frac{1}{2} \\ a \geqslant \frac{11}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < 1 \\ a > 3 \end{array} \right. \\ a \geqslant \frac{11}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 1 \\ a \geqslant \frac{11}{20} \end{cases} \\ \begin{cases} a > 3 \\ a \geqslant \frac{11}{20} \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 1 \\ a \geqslant \frac{11}{20} \end{cases} \\ a > 3. \end{array} \right.$$

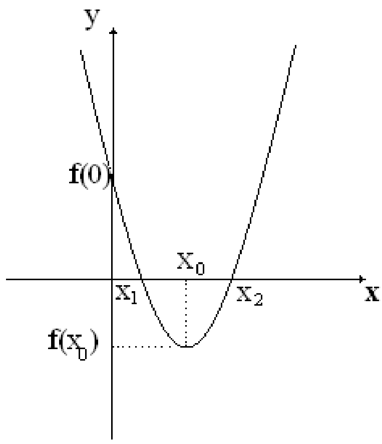
Таким чином рівняння (10.2.1) має обидва додатні корені при $a \in \left[\frac{11}{20}; 1\right) \bigcup (3; +\infty)$.

II спосіб – *«за допомогою графіка квадратичної функції»*

Очевидно, що гілки параболи $f(x) = x^2 - (2a+1)\,x + a^2 - 4a + 3$ напрямлені вгору. Обидва корені даного рівняння (абсциси точок перетину параболи з віссю OX) будуть додатними лише у випадку, коли парабола розташована відносно координатних осей наступним чином:

1) вершина параболи $(x_0; f(x_0))$ розташована нижче осі OX (лише за таких умов існують точки перетину з віссю OX);

2) вершина параболи – праворуч від осі OY (лише за таких умов точка перетину з OX, яка має більшу абсцису, розташована праворуч від осі OY);
3) точка $(0; f(0))$ перетину параболи з віссю OY належить додатній частині цієї осі (лише за таких умов точка перетину з OX, яка має меншу абсцису, розташована праворуч від осі OY).



Таким чином маємо систему «аналітично-графічних» умов: $\begin{cases} f(x_0) \leqslant 0 \\ x_0 > 0 \\ f(0) > 0. \end{cases}$

Звідки $\begin{cases} \left(\frac{2a+1}{2}\right)^2 - (2a+1)\left(\frac{2a+1}{2}\right) + a^2 - 4a + 3 & \leqslant & 0 \\ \frac{2a+1}{2} & > & 0 \\ a^2 - 4a + 3 & > & 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant \frac{11}{20} \\ a > -\frac{1}{2} \\ a^2 - 4a + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant \frac{11}{20} \\ a > -\frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} a > 3 \\ a < 1 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant \frac{11}{20} \\ \left[\begin{array}{l} a > 3 \\ a < 1 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 3 \\ a \geqslant \frac{11}{20} \end{cases} \\ \begin{cases} a < 1 \\ a \geqslant \frac{11}{20} \end{cases} \end{array} \right.$$

Звідки $a \in \left[\frac{11}{20}; 1\right) \bigcup (3; +\infty)$.

III спосіб – *«узагальнення II способу»*

Скористаємось наступною теоремою
Корені рівняння $\widetilde{a}x^2 + \widetilde{b}x + \widetilde{c} = 0$ є більшими за число d тоді і лише тоді, якщо

$$\begin{cases} \widetilde{a} \cdot f(d) & > & 0 \\ D & \geqslant & 0 \\ x_{\text{вер.}} & > & d. \end{cases} \qquad (10.2.3)$$

В нашому випадку:

1) $d = 0$;

2) $\widetilde{a} = 1 > 0$;

3) $f(0) = a^2 - 4a + 3$;

4) $D = (2a+1)^2 - 4(a^2 - 4a + 3) = 20a - 11$;

5) $x_{\text{вер.}} = \frac{2a+1}{2}$.

Тому, з урахуванням $(10.2.3)$, шукані значення параметру a є розв'язками системи нерівностей

$$\begin{cases} a^2 - 4a + 3 & > & 0 \\ 20a - 11 & \geqslant & 0 \\ \frac{2a+1}{2} & > & 0. \end{cases}$$

Звідки $a \in \left[\frac{11}{20}; 1\right) \bigcup (3; +\infty)$.

IV спосіб – *«за допомогою аналізу коренів квадратного рівняння, отриманих за стандартною формулою»*

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2a + 1 + \sqrt{20a - 11}}{2} \\ x = \dfrac{2a + 1 - \sqrt{20a - 11}}{2}. \end{array}\right.$$

За умовою ці корені рівняння повинні бути додатними одночасно, тобто

$$\begin{cases} \frac{2a+1+\sqrt{20a-11}}{2} > 0 \\ \frac{2a+1-\sqrt{20a-11}}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 1 > -\sqrt{20a - 11} \\ 2a + 1 > \sqrt{20a - 11} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ 2a + 1 > \sqrt{20a - 11} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 1 > 0 \\ 20a - 11 \geqslant 0 \\ 4a^2 + 4a + 1 > 20a - 11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 1 > 0 \\ 20a - 11 \geqslant 0 \\ 4a^2 - 16a + 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 1 > 0 \\ 20a - 11 \geqslant 0 \\ a^2 - 4a + 3 > 0. \end{cases}$$

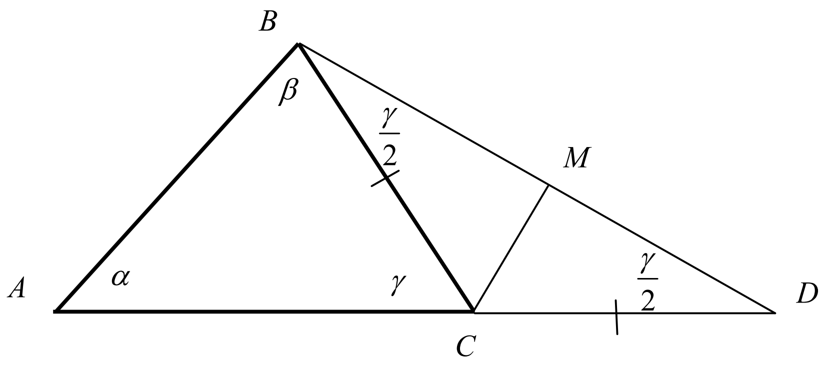
Звідки $a \in \left[\frac{11}{20}; 1\right) \bigcup (3; +\infty)$.

Відповідь: $a \in \left[\frac{11}{20}; 1\right) \bigcup (3; +\infty)$.

Задача 3.

На продовженні найбільшої сторони AC трикутника ABC відкладено відрізок CD, причому $CD = BC$. Доведемо, що $\angle ABD$ є тупим.

I спосіб



1) Позначимо кути трикутника ABC як α, β і γ відповідно. Тоді за властивістю кутів трикутника має місце рівність

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0. \qquad (10.3.1)$$

2) В $\triangle\ BCD$ проведемо бісектрису CM. Оскільки $BC = CD$, то $\triangle\ BCD$ є рівнобедреним з основою BD. І тому $\angle CBD = \angle CDB$. З іншого боку, за властивістю зовнішніх кутів $\triangle\ BCD$ має місце рівність $\angle CBD + \angle CDB = \angle ACB = \gamma$. Звідки $\angle CBD = \angle CDB = \frac{\gamma}{2}$. І тому

$$\angle ABD = \beta + \frac{\gamma}{2}. \qquad (10.3.2)$$

3) За умовою β – найбільший кут $\triangle\ ABC$. Тому $\beta > \alpha$, звідки

$$\beta + \frac{\gamma}{2} > \alpha + \frac{\gamma}{2}. \qquad (10.3.3)$$

4) Подамо (10.3.1) у вигляді

$$\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) + \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) = 180^0.$$

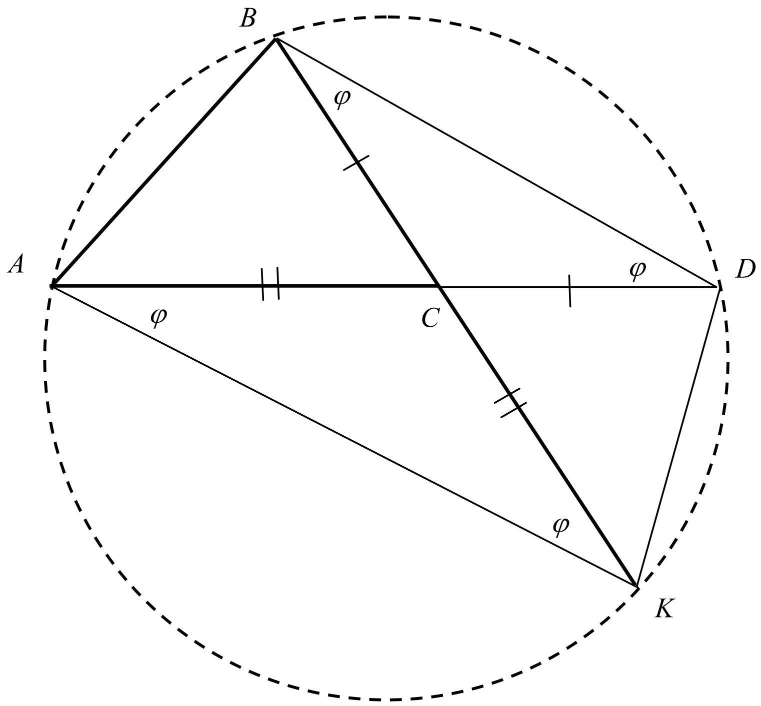
Тоді, з урахуванням (10.3.3), має місце нерівність $2\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) > 180^0$. Звідки

$$\beta + \frac{\gamma}{2} > 90^0. \qquad (10.3.4)$$

З (10.3.2) і (10.3.4) й випливає, що $\angle ABD$ є тупим. $\square$

II спосіб – *«за допомогою описаного кола»*

Навколо трикутника ABD опишемо коло ω і продовжимо BC до перетину з цим колом у точці K.



Покажемо, що чотирикутник $ABDK$ є рівнобічною трапецією.

1) За побудовою BCD є рівнобедреним трикутником з основою BD. Тому

$$CB = CD, \ \ \angle CBD = \angle CDB = \varphi.$$

2) За властивістю вписаних кутів кола, що спираються на одну дугу, мають місце рівності $\angle BDA = \angle BKA = \varphi, \ \angle KBD = \angle KAD = \varphi.$

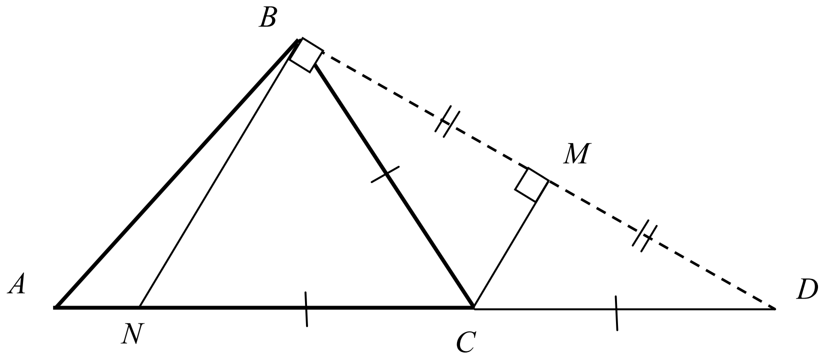
Оскільки внутрішні різносторонні кути при прямих BD, AK та січній AD є рівними, то за ознакою паралельних прямих маємо, що $AK \parallel BD$.

3) $AB = DK$, як хорди, що стягують рівні дуги. З рівності кутів AKB та DAK випливає і той факт, що $\triangle\ ACK$ є рівнобедреним з основою AK. Звідки $AC = CK$.

4) Якщо припустити, що $AD \parallel BK$, то матимемо, що $\angle ABK = \angle ADK = \angle BAD$. Але ж тоді $AC = CB$, що суперечить умові $AC > CB$. Отже, чотирикутник $ABDK$ є рівнобічною трапецією з основами AK і BD.

Оскільки $AC > CB$, то з подібності рівнобедрених трикутників BCD і ACK маємо, що $AK > BD$. Отже, AK є більшою основою трапеції $ABDK$. Звідки очевидний висновок: $\angle BAK$ – гострий, $\angle ABD$ – тупий.

III спосіб



1) В $\triangle\ BCD$ проведемо бісектрису CM. Оскільки $BC = CD$, то $\triangle\ BCD$ є рівнобедреним з основою BD. І тому бісектриса CM є висотою і медіаною.

2) Через вершину B проведемо пряму l паралельно до прямої CM. І нехай l перетинає пряму AC у точці N. Оскільки $BM = MD$ а $BN \parallel MC$, то за теоремою Фалеса $NC = CD$. За умовою $CD = BC$. Звідки $NC = BC$.

З іншого боку за властивістю паралельних BN, MC та січної BD маємо, що $NB \perp BD$. Звідки
$$\angle NBD = 90^0.$$

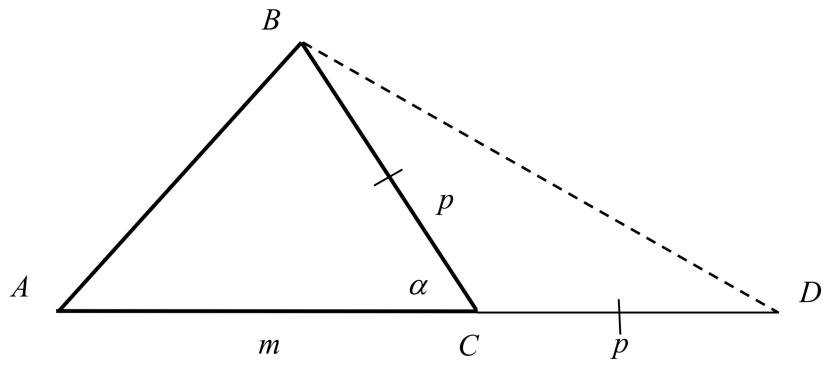
3) За умовою $\angle ABC$ – найбільший кут $\triangle\ ABC$. І тому сторона AC має найбільшу довжину серед сторін $\triangle\ ABC$. Звідки $AC > NC$. І тому точка N є внутрішньою точкою відрізка AC. Але ж тоді N є внутрішньою точкою відрізка AD. І тому за аксіомою вимірювання кутів має місце рівність
$$\angle ABD = \angle ABN + \angle NBD = \angle ABN + 90^0.$$
Звідки $\angle ABD > 90^0$. □

?! В якому випадку $\angle ABD$ буде прямим.

А чи звертали Ви увагу?

`Бісектриси суміжних кутів є перпендикулярними.`

IV спосіб – *«за теоремою косинусів»*



1) Для спрощення подальших записів введемо наступні позначення:

$$AC = m, \quad CD = p, \quad \angle BCA = \alpha.$$

Тоді $\angle BCD = (180^0 - \alpha$ (як суміжний із кутом $\angle BCA = \alpha$), $BC = p$ (бо за побудовою $BC = CD$).

2) З трикутника BCD за теоремою косинусів має місце рівність

$$BD^2 = 2p^2 - 2p^2\cos(180^0 - \alpha) = 2p^2 + 2p^2\cos\alpha, \qquad (10.3.5)$$

а з трикутника ACB за теоремою косинусів – рівність

$$AB^2 = m^2 + p^2 - 2mp\cos\alpha. \qquad (10.3.6)$$

3) Розглянемо трикутник ABD. Щоб довести, що кут ABD тупий, треба використати наслідок з теореми косинусів для тупокутного трикутника, тобто, що виконується нерівність

$$AD^2 > AB^2 + BD^2. \qquad (10.3.7)$$

З урахуванням рівностей (10.3.6) і (10.3.7) дослідимо знак різниці

$$AD^2 - AB^2 - BD^2 =$$

$$= (m+p)^2 - m^2 - p^2 + 2mp\cos\alpha - 2p^2 - 2p^2\cos\alpha =$$
$$= m^2 + p^2 + 2mp - m^2 - p^2 + 2mp\cos\alpha - 2p^2 - 2p^2\cos\alpha =$$
$$= (2mp - 2p^2) + (2mp\cos\alpha - 2p^2\cos\alpha) = 2p(m-p)\cdot(1+\cos\alpha).$$

Оскільки для довільного кута α будь-якого трикутника $(1+\cos\alpha) > 0$ і за умовою $m > p$, то $2p(m-p)\cdot(1+\cos\alpha) > 0$. Звідки $AD^2 - AB^2 - BD^2 > 0$ і тому $AD^2 > AB^2 + BD^2$.

Отже, кут ABD – тупий.

Задача 4.

Побудуємо графік функції

$$y = \frac{|x-4|}{4-x}\left(x^2-4x\right). \qquad (10.4.1)$$

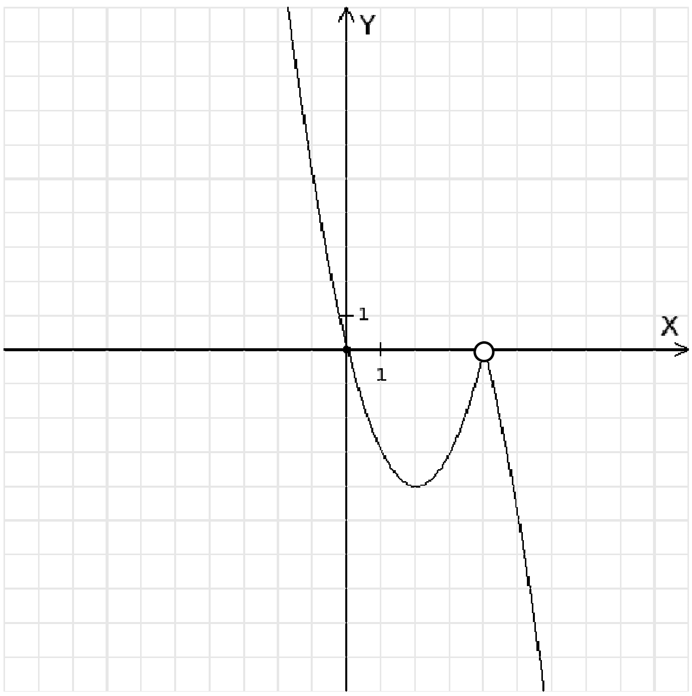
Якщо $x < 4$, то функція (10.4.1) набуває вид

$$y = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4 = f(x).$$

Якщо $x > 4$, то функція (10.4.1) набуває вид

$$y = x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4 = g(x).$$

Відносно фіксованої системи координат на площині побудуємо графіки кожної з функцій $y = f(x)$, $y = g(x)$ на проміжках $x < 4$ та $x > 4$ відповідно. Тоді графіком даної функції (10.4.1) буде об'єднання їх графіків.



Задача 5.

I спосіб

$$\left(a^2+b^2\right)^2+7a^2b^2=((a-b)^2+2ab)^2+7a^2b^2=(a-b)^4+4ab(a-b)^2+$$
$$+4a^2b^2+7a^2b^2=(a-b)^4+4ab(a-b)^2+11a^2b^2.$$

Оскільки $a-b$ ділиться на 11, то кожен з трьох доданків в останньому виразі діляться на 11, а значить і сума ділиться на 11. Тобто $\left(a^2+b^2\right)^2+7a^2b^2$ ділиться на 11. □

II спосіб

$$\left(a^2+b^2\right)^2+7a^2b^2=\left(a^2+b^2\right)^2-4a^2b^2+11a^2b^2=\left(a^2-b^2\right)^2+11a^2b^2=$$
$$=(a-b)^2(a+b)^2+11a^2b^2.$$

Оскільки $a-b$ ділиться на 11, то кожен з двох доданків в останньому виразі діляться на 11. І тому їх сума ділиться на 11. □

III спосіб

Оскільки $a-b$ ділиться на 11, то $a-b=11k$, $k\in Z$. Звідки $a^2+b^2=121k^2+2ab$. Тому

$$\left(a^2+b^2\right)^2+7a^2b^2=\left(121k^2+2ab\right)^2+7a^2b^2=$$
$$=121^2\cdot k^4+4abk^2\cdot 121+4a^2b^2+7a^2b^2=121\cdot k^2(121k^2+4ab)+11a^2b^2.$$

Оскільки кожен з двох доданків в останньому виразі діляться на 11, то їх сума також ділиться на 11. □

11 клас

Задача 1.

I спосіб

Оскільки функція $f(x) = \sqrt[13]{x}$ є зростаючою на множині всіх дійсних чисел, то порівнявши підкореневі вирази, отримаємо відношення між заданими числами.

При доповненні цих чисел до одиниці, маємо, що дріб $\dfrac{1997}{1998}$ відрізняються від 1 на величину $\dfrac{1}{1998}$, а дріб $\dfrac{1998}{1999}$ на $\dfrac{1}{1999}$.

Отже, другий дріб є більшим за перший. І тому $\sqrt[13]{\dfrac{1997}{1998}} < \sqrt[13]{\dfrac{1998}{1999}}$.

Нижче наведемо можливу форму символічного подання зазначених міркувань

$$\begin{array}{rcl} \sqrt[13]{\frac{1997}{1998}} & \bigvee & \sqrt[13]{\frac{1998}{1999}} \\ \frac{1997}{1998} & \bigvee & \frac{1998}{1999} \\ 1-\frac{1}{1998} & \bigvee & 1-\frac{1}{1999} \\ -\frac{1}{1998} & \bigvee & -\frac{1}{1999} \\ \frac{1}{1998} & \bigwedge & \frac{1}{1999} \end{array}$$

Оскільки $\dfrac{1}{1998} > \dfrac{1}{1999}$, то $\sqrt[13]{\dfrac{1997}{1998}} < \sqrt[13]{\dfrac{1998}{1999}}$.

II спосіб

Визначимо знак різниці

$$\frac{1997}{1998} - \frac{1998}{1999} = \frac{1997 \cdot 1999 - 1998^2}{1998 \cdot 1999}.$$

Розглянемо загальний вид чисельника дробу, врахувавши додатність знаменника

$$(n-1)(n+1) - n^2 = n^2 - 1 - n^2 = -1 < 0.$$

Отже, перший дріб є меншим за другий.

III спосіб

Порівняємо дроби $\dfrac{n}{n+1}$ та $\dfrac{n+1}{n+2}$. Визначимо знак їх різниці

$$\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}=\frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{(n+1)(n+2)}=-\frac{1}{(n+1)(n+2)}<0.$$

Отже, перший дріб є меншим за другий.

Нижче наведемо можливу форму символічного подання зазначених міркувань

$$\sqrt[13]{\frac{1997}{1998}} \ \bigvee \ \sqrt[13]{\frac{1998}{1999}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1997}{1998} &\ \bigvee\ \frac{1998}{1999}\\
1997\cdot 1999 &\ \bigvee\ 1998^2\\
(1998-1)(1998+1) &\ \bigvee\ 1998^2\\
1998^2-1 &\ \bigvee\ 1998^2
\end{aligned}$$

Оскільки $1998^2-1<1998^2$, то $\sqrt[13]{\dfrac{1997}{1998}}<\sqrt[13]{\dfrac{1998}{1999}}$.

Відповідь: $\sqrt[13]{\dfrac{1997}{1998}}<\sqrt[13]{\dfrac{1998}{1999}}$.

Задача 2.

I спосіб

1) Оскільки рівність $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ виконується для будь-яких додатних x та y, то зокрема й для $x = 1$. Тому $f(y) = f(1 \cdot y) = f(1) + f(y)$. Звідки $f(1) = 0$.

2) З іншого боку

$$f(1) = f\left(2013 \cdot \frac{1}{2013}\right) = f(2013) + f\left(\frac{1}{2013}\right).$$

За умовою $f\left(\frac{1}{2013}\right) = 1$. Тому, з урахуванням $f(1) = 0$, останню рівність можна подати у вигляді $0 = f(2013) + 1,$ звідки $f(2013) = -1$.

II спосіб

$$f\left(\frac{1}{2013}\right) = f\left(\frac{2013}{2013^2}\right) = f\left(\frac{1}{2013^2} \cdot 2013\right) = f\left(\frac{1}{2013^2}\right) + f\,(2013) =$$

$$= f\left(\frac{1}{2013}\right) + f\left(\frac{1}{2013}\right) + f\,(2013) = 2f\left(\frac{1}{2013}\right) + f\,(2013)\,.$$

Звідки

$$f\,(2013) = -f\left(\frac{1}{2013}\right) = -1.$$

III спосіб

Оскільки єдиним розв'язком заданого в умові задачі функціонального рівняння є функція $f(z) = \log_a z$, де a – довільне додатне число (відмінне від 1), то отримуємо

$$f(2013) = \log_a 2013 = \log_a \left(\frac{1}{2013}\right)^{-1} = -1 \cdot \log_a \frac{1}{2013} =$$

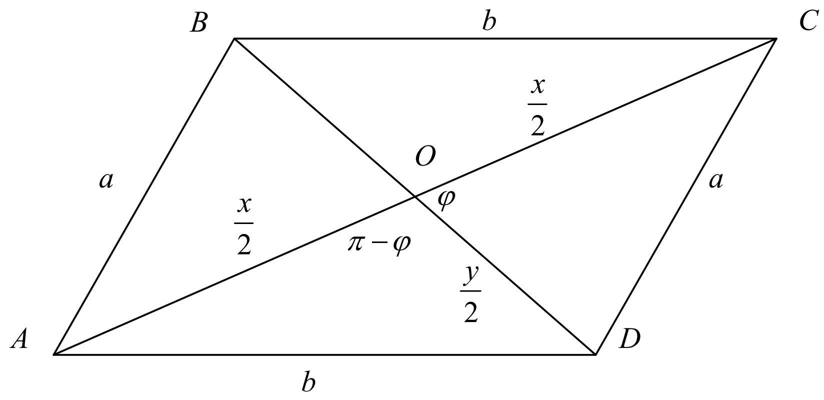
$$= -1 \cdot f\left(\frac{1}{2013}\right) = -1 \cdot 1 = -1.$$

Відповідь: -1.

Задача 3.

Знайдемо площу паралелограма зі сторонами a та b, якщо гострий кут між діагоналями дорівнює φ.

I спосіб – *«за допомогою теореми косинусів»*



Заради визначеності будемо вважати, що $b > a$ ($a = AB = CD$, $b = BC = AD$). Нехай далі діагоналі AC і BD паралелограма $ABCD$ дорівнюють x та y відповідно. Тоді площа S паралелограма може бути знайдена за формулою

$$S = \frac{1}{2}xy \cdot \sin\varphi. \tag{11.3.1}$$

З $\triangle COD$ за теоремою косинусів отримуємо

$$a^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - 2\frac{xy}{4}\cos\varphi. \tag{11.3.2}$$

З $\triangle AOD$ за теоремою косинусів отримуємо

$$b^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - 2\frac{xy}{4}\cos(\pi - \varphi) =$$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + 2\frac{xy}{4}\cos\varphi. \tag{11.3.3}$$

Віднявши почленно рівності (11.3.3) й (11.3.2), маємо

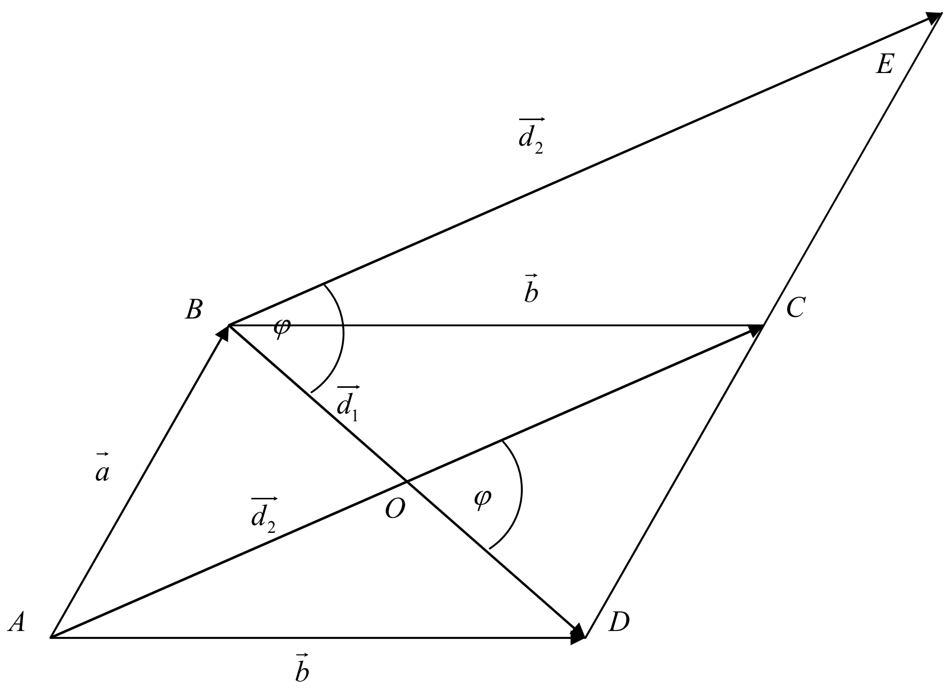
$$xy\cos\varphi = b^2 - a^2. \tag{11.3.4}$$

Помноживши обидві частини рівності (11.3.4) на $\sin\varphi$ та поділивши на $2\cos\varphi$, приходимо до рівності

$$\frac{1}{2}xy \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\operatorname{tg}\varphi,$$

що й задає шукану площу.

II спосіб – *«за допомогою векторного методу»*



Нехай a і b – довжини сторін AB і AD паралелограма $ABCD$, а φ – гострий кут між діагоналями AC і BD.
Введемо наступні позначення $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{b}$. Тоді $|\overrightarrow{a}| = a$, $\left|\overrightarrow{b}\right| = b$.

Позначимо далі $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{d_1}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{d_2}$. Тоді мають місце векторні рівності

$$\overrightarrow{d_1} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}, \quad \overrightarrow{d_2} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}. \tag{11.3.5}$$

Крім того $\angle\left(\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}\right) = \varphi$, і тому площу паралелограма $ABCD$ можна подати у вигляді

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{d_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{d_2}\right| \cdot \sin\angle\left(\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}\right) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{d_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{d_2}\right| \cdot \sin\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{d_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{d_2}\right| \cdot \cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}\left\langle\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}\right\rangle \cdot \operatorname{tg}\varphi. \tag{11.3.6}$$

За правилами обчислення скалярного добутку векторів має місце рівність $\left\langle\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}\right\rangle = \left\langle\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}\right\rangle = \left\langle\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}\right\rangle + \left\langle\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right\rangle - \left\langle\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right\rangle - \langle\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}\rangle =$
$= \left|\overrightarrow{b}\right|^2 - |\overrightarrow{a}|^2 = b^2 - a^2$. Звідки випливає, що $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left|b^2 - a^2\right| \operatorname{tg}\varphi$.

Відповідь: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \left|b^2 - a^2\right| \cdot \operatorname{tg}\varphi$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 3.

Доведіть, що площу паралелограма з діагоналями e і f та гострим кутом ψ між сторонами можна обчислити за формулою

$$S = \frac{1}{4} \cdot \left|e^2 - f^2\right| \cdot \operatorname{tg}\psi.$$

А чи звертали Ви увагу?

1) Бісектриси протилежних кутів паралелограма є паралельними;

2) бісектриси сусідніх кутів паралелограма є перпендикулярними;

3) кут між висотами паралелограма, опущених з вершини тупого (гострого) кута, дорівнює гострому (тупому) куту між сторонами паралелограма.

Задача 4.

Розглянемо функції, що стоять у лівій та правій частинах рівняння.

$$1 + \cos(x-1) = \frac{x^2+1}{x}, \quad \text{де} \quad x > 0.$$

Функція $y = 1 + \cos(x+1)$ є обмеженою, бо $-1 \leqslant \cos(x-1) \leqslant 1$, тому

$$0 \leqslant 1 + \cos(x-1) \leqslant 2.$$

Отже, найбільшим значенням цієї функції є 2.

Функція $y = \frac{x^2+1}{x}$ може бути записана у вигляді $y = x + \frac{1}{x}$. При $x > 0$ ця функція є обмеженою знизу

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2.$$

Отже, найменшим її значенням є 2.

За даних умов рівність лівої і правої частини рівняння може виконуватись лише за умови їх рівності 2. Отже задане рівняння рівносильне наступній системі рівнянь

$$\begin{cases} 1 + \cos(x-1) = 2; \\ \frac{x^2+1}{x} = 2. \end{cases}$$

Розв'язавши друге рівняння системи, яке рівносильне рівнянню

$$x^2 - 2x + 1 = 0,$$

отримуємо корінь $x = 1$. Підставивши отриманий розв'язок у перше рівняння системи маємо $1 + 1 = 2$, звідки слідує, що $x = 1$ є коренем також і першого рівняння. Отже задане рівняння має один корінь $x = 1$.

Відповідь: $x = 1$.

Задача 5.

Обидві частини умови $a^2 + b^2 + ab = a + b$ помножимо на 2 і перетворимо отриману рівність наступним чином

$2a^2 + 2b^2 + 2ab = 2a + 2b$,

$a^2 + b^2 + (a + b)^2 = 2(a + b)$,

$a^2 + b^2 = -(a + b)^2 + 2(a + b)$,

$a^2 + b^2 = -((a + b)^2 - 2(a + b) + 1) + 1$,

$a^2 + b^2 = -(a + b - 1)^2 + 1$.

Оскільки $-(a + b - 1)^2 \leqslant 0$, то $-(a + b - 1)^2 + 1 \leqslant 1$, звідки $a^2 + b^2 \leqslant 1$.

Відповідь: 1.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Апостолова Г. В. Перші зустрічі з параметрами / Г. В. Апостолова. – К. : Факт, 2004. – 328 с.
2. Апостолова Г. В. Хитромудрий модуль / Г. В. Апостолова. – К. : Факт, 2006. – 256 с.
3. Апостолова Г. В. Антьє і мантиса числа / Г.В. Апостолова, В.В. Ясінський. – К. : Факт, 2006. – 128 с.
4. Основы теории делимости чисел. Решение уравнений в целых числах. Факультативный курс /[В. В. Бардушкин, И. Б. Кожухов, А. А. Прокофьев, Т. П. Фадеичева.] – Москва : МГИЭТ (ТУ), 2003. – 224 с.
5. Березина Л. Ю. Графы и их применение : [пособие для учителей] / Л. Ю. Березина. – М. : Просвещение, 1979. – 143 с.
6. Бродский Я. С. Функциональные уравнения / Я. С. Бродский, А. К. Слипенко. – К. : Вища школа. Головное изд-во, 1983. – 96 с.
7. Виленкин Н. Я. Индукция. Комбинаторика : [пособие для учителей] / Н. Я. Виленкин. – М. : Просвещение, 1976. – 48 с.
8. Галкин Е. В. Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами : [учебное пособие для учащихся 7-11 кл.] / Е. В. Галкин. – Челябинск : Взгляд, 2005. – 271 с.
9. Германович П. Ю. Сборник задач по математике на сообразительность : [пособие для учителей] / П. Ю. Германович. – М. : Учпедгиз, 1960. – 224 с.
10. Голубев В. И. Решение сложных и нестандартных задач по математике / В. И. Голубев. – М : ИЛЕКСА, 2007. – 252 с.
11. Головина Л. И. Индукция в геометрии / Л. И. Головина, И. М. Яглом. – М. : Физматгиз, 1961. – 101 с.
12. Гончарова І. В. Евристики в геометрії [факультативний курс: книга для вчителя] / І. В. Гончарова, О.І. Скафа. – Х. : Основа, 2004. – 112 с.
13. Горнштейн П. И. Задачи с параметрами / П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – К. : Текст; ОКО, 1992. – 290 с.
14. Дзигіна Л. Б. Програма підготовки учнів до участі в математичних олімпіадах / Л. Б. Дзигіна. // Математика в школах України: Науково-методичний журнал, – Харків : Основа, 2009. – № 16/18. – 89 с.
15. Екимова М. А. Задачи на разрезание / М. А. Екимова, Г. П. Кукин. – М. : МЦНМО, 2002. – 122 с.

16. Канель-Белов А. Я. Как решают нестандартные задачи / А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи. ; под ред. В. О. Бугаенко. – [4-е изд.] – испр. М. : МЦНМО, 2008. – 96 с.
17. Козко А. И. Задачи с параметром и другие сложные задачи / А. И. Козко, В. Г. Чирский. – М. : МЦНМО, 2007. – 296с.
18. Линдгрен Г. Занимательные задачи на разрезание : пер. с англ. / Ю. Н. Сударева. под ред. и с послесл. И. М. Яглома. – М. : Мир, 1977. – 256 с.
19. Летчиков А. В. Принцип Дирихле. Задачи с указаниями и решениями / А. В. Летчиков. – Ижевск : Удмуртский университет, 1992. – 108 с.
20. Ліпчевський Л. В. Розв'язування нерівностей. Нестандартні способи доведення нерівностей [навчально-методичний посібник] / Л. В. Ліпчевський, У. В. Остапчук. – Біла Церква : КОІПОПК, 2004. – 76 с.
21. Мельников О. И. Занимательные задачи по теории графов / О. И. Мельников. – Минск: ТетраСистемс, 2001. – 144 с.
22. Алгебра : [підручник для 8-х класів з поглибленим вивченням математики] / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2008. – 368 с.
23. Мерзляк А. Г. Геометрія : [підручник для 8-х класів з поглибленим вивченням математики] / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2008. – 240 с.
24. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии: в 2 ч. / В. В. Прасолов. – М. : Наука, 1991.
25. Задачі з параметрами / В. К. Репета, Н. О. Клешня, М. В. Коробова, Л. А. Репета. – К. : Вища школа, 2006. – 302 с.
26. Седракян Н. М. Неравенства. Методы доказательства / Н. М. Седракян, А. М. Авоян; [пер. с арм. Г. В. Григоряна] – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 256 с.
27. Шаповалов А. В. Принцип узких мест / А. В. Шаповалов. – М. : МЦНМО, 2006. – 24 с.
28. Шень А. Игры и стратегии с точки зрения математики / А. Шень. – М. : МЦНМО, 2007. – 40 с.
29. Шень А. Математическая индукция / А. Шень. – 3-е изд., дополн. – М. : МЦНМО, 2007. – 32 с.
30. Ясінський В. Теорія лишків та її застосування до розв'язування олімпіадних задач / В. Ясінський. – Математика в школі: Науково-методичний журнал. – 2009. – № 1/2. – 40, [35] с.
31. Ясінський В. Принцип Штурма та його використання під час розв'язування олімпіадних екстремальних задач / В. Ясінський, Л. Наконечна. – Математика в школі: Науково-методичний журнал. – 2009. – № 9. – 40, [33] с.
32. Ясінський В. А. Олімпіадна математика: функціональні рівняння, метод математичної індукції / В. А. Ясінський. – Х. : Основа, 2005. – 69 с.

Математичні олімпіади і турніри в Україні

33. Вышенский В. А. Сборник задач киевских математических олимпиад / В. А. Вышенский, Н. В. Карташев, В. И. Михайловский, М. И. Ядренко. – К. : Вища школа, 1984. – 240 с.
34. Вишенський В. А. Київські математичні олімпіади 1984-1993 рр. : [збірник задач] / В. А. Вишенський, М. В. Карташов. – К. : Либідь, 1993. – 144 с.
35. Вишенський В. А. Українські математичні олімпіади : [довідник] / В. А. Вишенський, О. Г. Ганюшкін. – К. : Вища школа, 1993. – 415 с.
36. Лейфура В. М. Математичні олімпіади школярів України. 1991-2000 / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман. – К. : Техніка, 2003. – 541 с.
37. Федак І. В. Готуємося до олімпіади з математики : [посібник для ЗНЗ] / І. В. Федак. – Чернівці, 2003.
38. Басанько А. М. За лаштунками підручника з математики : [збірник розвиваючих задач для учнів 5 – 7 класів] / А. М. Басанько, А. О. Романенко. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004.
39. Коваль Т. В. 400 задач з математичних олімпіад. 8-11 класи / Т. В. Коваль. – Тернопіль : Мандрівець, 2004. – 80 с.
40. Лейфура В. М. Змагання юних математиків України. 2003 рік / В. М. Лейфура. – Х. : Основа, 2004. – 80 с.
41. Ясінський В. А. Олімпіадні задачі [випуск 1: навчальний посібник] / В. А. Ясінський. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2004. – 40 с.
42. Сборник материалов математических олимпиад: 906 самых интересных задач и примеров с решениями / [Р. И. Довбыш, Л. Л. Потемкина, Н. Л. Трегуб и др.] – Донецк: ООО ПКФ «БАО», 2005. – 336 с.
43. Лось В. М. Математика: навчаємо міркувати. Розв'язування нестандартних задач : [навч. посібник] / В. М. Лось, В. П. Тихієнко. – К. : Кондор, 2005 – 312 с.
44. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч : [навчальний посібник] / О. А. Сарана – К. : А.С.К., 2005. – 344 с.
45. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язання / В. А. Ясінський. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005. – 208 с.
46. Ясінський В. А. Практикум з розв'язування задач математичних олімпіад : [методический материал] / В. А. Ясінський. // Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2006. – 128 с.
47. Готуємось до олімпіади з математики / упорядн. А. Б. Веліховська, О. В. Гримайло. // Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2007. – Вип. 2 (50) – 160 с.
48. Вороний О. М. Готуємось до олімпіади з математики [книга 1] / О. М. Вороний. – Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2008. – Вип. 5 (65). – 128 с.

49. Вороний О. М. Готуємось до олімпіади з математики [книга 2] / О. М. Вороний.– Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2008. – Вип. 6 (66). – 141, [3] с.
50. Анікушин А. В. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2006-2007 / А. В. Анікушин, А. Р. Арман. – К. : Літера, 2008. – 135 с.
51. Анікушин А. В. Математичні олімпіадні змагання школярів. 2006-2007 / А. В. Анікушин, А. Р. Арман. – К. : Літера, 2008. – 224 с.
52. Анікушин А. В. Всеукраїнські математичні бої – 2009 / А. В. Анікушин, А. Р. Арман; за ред. Б. В. Рубльова. – Дніпропетровськ: Інновація, 2010. – 96 с.
53. Анікушин А. В. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2007-2008 та 2008 – 2009 / А. В. Анікушин, А. Р. Арман; за ред. Б. В. Рубльова. – Львів: Каменяр, 2010. – 552 с.

Математичні олімпіади і турніри в Росії

54. Агаханов Н. Х. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006. Окружной и финальный этапы / Н. Х. Агаханов. – М. : МЦНМО, 2007. – 468 с.
55. Агаханов Н. Х. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 1 / [Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников и др.; под общ. ред. С. И. Демидовой, И. И. Колисниченко]. – М. : Просвещение, 2008. – 192 с.
56. Математика. Областные олимпиады. 8-11 классы / [Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников и др.]. – М. : Просвещение, 2010. – 239с.
57. Агаханов Н. Х. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 2 / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский; [под общ. ред. С. И. Демидовой, И. И. Колисниченко]. – М. : Просвещение, 2009. – 159 с.
58. Агаханов Н. Х. Математика. Районные олимпиады. 6-11 классы / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. – М. : Просвещение, 2010. – 192 с.
59. Агаханов Н. Х. Математика. Международные олимпиады / Н.Х. Агаханов, П. А. Кожевников, Д. А. Терешин. – М. : Просвещение, 2010. – 127 с.
60. Балаян Э. Н. 1001 олимпиадная и занимательная задачи по математике / Э. Н. Балаян. – 3-е изд. – Ростов н/Д: Феникс, 2008. – 364 с.
61. Весенний Турнир Архимеда. Олимпиада для 5-6 классов. Задания с решениями, технология проведения / [Баранова Т. А., Блинков А. Д., Кочетков К. П. и др.]. – М. : МЦНМО, 2003. – 128 с.
62. Болтянский В. Г. Сборник задач московских математических олимпиад / В. Г. Болтянский, А. А. Леман. – М. : Просвещение, 1965. – 384 с.
63. Бончковский Р. Н. Московские математические олимпиады 1935 и 1936 годов / Р. Н. Бончковский. – ОНТИ НКТП СССР, 1936. – 82 с.
64. Вавилов В. В. Задачи отборочных математических олимпиад / В. В. Вавилов. – М. : МГУ, 1992. – 61 с.
65. Галкин Е. В. Нестандартные задачи по математике. Алгебра: [учебное пособие для учащихся 7-11 кл] / Е. В. Галкин. – Челябинск: Взгляд, 2004. – 448 с.

66. Гальперин Г. А. Московские математические олимпиады / Г. А. Гальперин, А. К. Толпыго. – М. : Просвещение, 1986. – 303с.
67. Генкин С. А. Ленинградские математические кружки / С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин. – Киров: Аса, 1994. – 272 с.
68. Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике / Н. В. Горбачев. – М. : МЦНМО, 2005. – 560 с.
69. Егоров А. А. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Математика / А. А. Егоров, Ж. М. Раббот . – М. : Бюро Квантум, 2006. – (Библиотечка «Квант»)
70. Зубелевич Г. И. Сборник задач московских математических олимпиад (с решениями): [Пособие для учителей 5-8 классов.] // под редакцией К. П. Сикорского, изд. 2-е, переработ. / Г. И. Зубелевич. – М. : Просвещение, 1971. – 304 с.
71. Математика в задачах: Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду / [под ред. А. А. Заславского, Д. А. Пермякова, А. Б. Скопенкова, М. Б. Скопенкова и А. В. Шаповалова]. – М. : МЦНМО, 2009. – 488 с.
72. Московские математические регаты / [сост. А. Д. Блинков, Е. С. Горская, В. М. Гуровиц]. – М. : МЦНМО, 2007. – 360 с.
73. Олимпиада «Ломоносов» по математике (2005-2008). – М. : Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2008. – 48 с.
74. Московские математические олимпиады 1993-2005 г. / [Федоров Р. М., Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К., Ященко И. В.] / [под ред. В. М. Тихомирова]. – М. : МЦНМО, 2006. – 456 с.
75. Севрюков П. Ф. Подготовка к решению олимпиадных задач по математике / П. Ф. Севрюков. – Изд. 2-е. – М. : Илекса; Народное образование; Ставрополь : Сервисшкола, 2009. – 112 с.
76. Спивак А. В. Тысяча и одна задача по математике / А. В. Спивак. – М. : Просвещение, 2002. – 208 с.
77. Фомин А. А. Школьные олимпиады. Международные математические олимпиады / А. А. Фомин, Г. М. Кузнецова. – М. : Дрофа, 2006. – 159 с.
78. Фомин Д. В. Санкт-Петербургские математические олимпиады / Д. В. Фомин. – СПб. : Политехника, 1994. – 309 с.
79. Ященко И. В. Приглашение на математический праздник / И. В. Ященко. – М. : МЦНМО, 2005. – 104 с.
80. Олимпиадные задания по математике. 9-11 классы: решение олимпиадных задач повышенной сложности / [сост. В. А. Шеховцов]. – Волгоград: Учитель, 2009. – 99 с.

Математичні олімпіади за часів СРСР

81. Агаханов Н. Х. Математические олимпиады школьников / Н. Х. Агаханов, Л. П. Купцов, Ю. В. Нестеренок. – М.: Просвещение: Учеб. лит., 1997. – 208 с.
82. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад / И. Л. Бабинская. – М.: Наука, 1975. – 112 с.
83. Бугулов Е. А. Сборник задач для подготовки к математическим олимпиадам / Е. А. Бугулов, Б. А. Толасов. – Орджоникидзе, 1962. – 226 с.
84. Васильев Н. Б. Сборник подготовительных задач к Всероссийской олимпиаде юных математиков / Н. Б. Васильев, А. А. Егоров. – М.: Учпедгиз, 1963. – 53 с.
85. Васильев Н. Б. Заочные математические олимпиады / Н. Б. Васильев, В. Л. Гуттенмахер, Ж. М. Раббот, А. Л. Тоом. – [2-е изд.]. – М.: Наука, 1987. – 176 с.
86. Васильев Н. Б. Задачи всесоюзных математических олимпиад / Н. Б. Васильев, А. А. Егоров. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
87. Петраков И. С. Математические олимпиады школьников: [пособие для учителей] / И. С. Петраков. – М.: Просвещение, 1982. – 96 с.
88. Рябухин Ю. М. Кишиневские математические олимпиады / Ю. М. Рябухин, В. П. Солтан, Б. И. Чиник. – Кишинев: Штиинца, 1983. – 76 с.
89. Савин А. П. Физико-математические олимпиады: [сборник] / А. П. Савин. – М.: Знание, 1977. – 160 с.
90. Шустеф Ф. М. Сборник олимпиадных задач по математике / [под ред. Ф. М. Шустеф] / Ф. М. Шустеф, А. М. Фельдман, В. Ю. Гуревич. – Минск: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения БССР, 1962. – 84 с.

Міжнародні та закордонні математичні олімпіади

91. Берник В. И. Сборник олимпиадных задач по математике / В. И. Берник, И. К. Жук, О. В. Мельников. – М.: Нар. асвета, 1980. – 144 с.
92. Васильев Н. Б. Задачи Всесоюзных математических олимпиад / Н. Б. Васильев, А. А. Егоров. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
93. Конягин С. В. Зарубежные математические олимпиады / [под ред. И. Н. Сергеева] / С. В. Конягин, Г. А. Тоноян, И. Ф. Шарыгин. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – (Б-ка мат. кружка). – 416 с.
94. Венгерские математические олимпиады. [пер. с венг. Ю. А. Данилова. под ред. и с предисл. В. М. Алексеева] / Й. Кюршак, Д. Нейкомм, Д. Хайош, Я. Шурани. – М.: Мир, 1976. – 543 с.
95. Лейфура В. М. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язування / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман. – Львів: Євро світ, 1999. – 128 с.
96. Морозова Е. А. Международные математические олимпиады. Задачи, решения, итоги: пособие для учащихся / Е. А. Морозова, И. С. Петраков, В. А. Скворцов. – [4-е изд., испр. и доп]. – М.: Просвещение, 1976. – 288 с.

97. Страшевич С. Польские математические олимпиады / С. Страшевич, Е. Бровкин; предисл, А. Пелчинского и А. Шинцеля; пер. с польск. Ю. А. Данилова; под ред. В.М. Алексеева. – М. : Мир, 1978. – 338 с.
98. Школьные олимпиады. Международные математические олимпиады / [сост. А. А. Фомин, Г. М. Кузнецова]. – М. : Дрофа, 1998. – 160 с.

Internet ресурси

1. Київські олімпіади з математики (сайт київських та всеукраїнських олімпіад та турнірів з математики, де можна знайти тексти завдань, результати та умови проведення математичних змагань, що проходили в Україні протягом останніх років) [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://matholymp.org.ua/
2. Фізико-математичний журнал «Квант» (завдання різних математичних олімпіад за 1971-2002рр) [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://kvant.mirror1.mccme.ru/
3. Сайт міжнародних олімпіад з математики [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://www.imo-official.org/
4. Олимпиады для школьников [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://olimpiada.ru/
5. Всероссийская олимпиада по математике [Електронний ресурс]. – Режим доступа: math.rusolymp.ru/
6. Российская страница международного математического конкурса «Кенгуру» [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://mathkang.ru/
7. Українська сторінка міжнародного конкурсу «Кенгуру» [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://www.kangaroo.com.ua/index.php
8. Московская математическая олимпиада школьников [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://olympiads.mccme.ru/mmo/
9. Санкт-Петербургские математические олимпиады [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://www.pdmi.ras.ru/ olymp/
10. Турнир городов Международная математическая олимпиада для школьников [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://www.turgor.ru/
11. Сайт Московского Центра Непрерывного Математического Образования [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://www.mccme.ru/
12. Задачная база олимпиадных задач (декілька тисяч олімпіадних задач російських і міжнародних математичних змагань). [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://zaba.ru/, http://problems.ru/